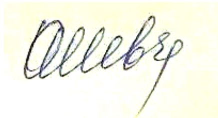
**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И
АРХИТЕКТУРЫ»**

На правах рукописи



Шевчук Оксана Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

Специальность 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ» (технические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Донецк – 2023

Работа выполнена в ГОУ ВПО «ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ», г. Макеевка.

Научный руководитель: доктор технических наук, доцент
Конопацкий Евгений Викторович,
ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет» (г. Нижний Новгород), профессор кафедры инженерной геометрии, компьютерной графики и автоматизированного проектирования

Официальные оппоненты: **Голоскоков Дмитрий Петрович**,
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I» (г. Санкт-Петербург), профессор кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций»

Перинская Елена Владимировна,
кандидат технических наук,
ГОУВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (г. Донецк), доцент кафедры «Прикладная математика и искусственный интеллект»

Ведущая организация: **ФГБУ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук (г. Москва)**

Защита состоится «30» мая 2023 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 02.2.006.02 при ГОУВПО «ДОННТУ» и ГОУ ВПО «ДОННУ» по адресу: 283001, г. Донецк, ул. Артема, 58, корп. 1, ауд. 203 Тел./факс: +7(856)304-30-55, e-mail: uchensovet@donntu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГОУВПО «ДОННТУ» по адресу: 283001, г. Донецк, ул. Артема, 58, корп. 2. Адрес сайта университета: http://donntu.ru

Автореферат разослан «___» ____________ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 02.2.006.02
кандидат технических наук, доцент Т.В. Завадская

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В инженерной практике широкое распространение получили стальные тонкостенные оболочки вращения: газгольдеры, силосы, трубопроводы больших диаметров, дымовые и вентиляционные трубы, водонапорные башни, вертикальные цилиндрические резервуары. В процессе эксплуатации тонкостенные оболочки изменяют свою первоначальную идеализированную геометрическую форму под действием объективных и субъективных факторов, к которым относятся: нагрузки (собственный вес конструкции, гидростатическое давление, вакуум, ветровая и снеговая нагрузки); погрешности изготовления, транспортировки и монтажа; нарушение условий эксплуатации. Имеющиеся случаи разрушения приведенных выше инженерных сооружений привели к необходимости периодического мониторинга их технического состояния в течение всего периода эксплуатации. Среди методов диагностики технического состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений с несовершенствами геометрической формы наибольшее распространение получили методы конечно-элементного анализа их деформированного состояния (ДС). При этом процесс моделирования включает геометрическое моделирование поверхности оболочки с несовершенствами и численное моделирование ДС оболочки. Такой подход обладает рядом недостатков. Во-первых, численный расчёт ДС оболочки выполняется достаточно долго. Например, расчёт ДС резервуара для хранения нефтепродуктов, содержащий 65854 конечных элементов в виде прямоугольных пластин с учётом геометрической и конструктивной нелинейности занял более 25 часов на компьютере под управлением процессора Intel Core i5-2400, что для выполнения инженерных изысканий как минимум неудобно. Причём 99 % этого времени занимает именно численный расчёт ДС оболочки. Во-вторых, возникают сложности учёта конструктивной нелинейности, приводящей к необходимости реализации особой схемы поэтапного нагружения оболочки под действием гидростатической нагрузки. Во избежание указанных недостатков достаточно эффективно использовать такие инструменты математического моделирования, как многомерная интерполяция и аппроксимация. Их применение для нахождения численного решения дифференциальных уравнений (ДУ) и обработки полученных результатов моделирования позволит обеспечить достаточную для инженерных расчётов точность и значительно повысить быстродействие вычислений.

Исходя из вышеизложенного, разработка новых и совершенствование существующих численных методов компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений является актуальной научной задачей, имеющей важное отраслевое значение.

Степень разработанности темы исследования. Теоретической базой для проведения исследований стали работы ведущих учёных и их учеников:

– в области численного решения ДУ в частных производных: Березина И.С., Бут Э.Д., Золотова А.Б., Калиткина Н.Н., Павлыша В.Н., Самарского А.А., Смирнова В.А., Тихонова А.Н., Хемминга Р.В. и др.;

– в области моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений: Авдонина А.С., Власова В.З., Вольмира А.С., Лессига Е.Н., Мущанова В.Ф., Новожилова В.В., Сафаряна М.К., Тарасенко А.А., Тимошенко С.П. и др.;

– в области многомерной интерполяции и аппроксимации: Бахвалова Ю.Н., Бутырского Е.Ю., Голубинского А.Н., Квасова Б.И., Buhmann M.D., Micchelli C.A., Wendland H. и др.;

– в области конечно-элементного анализа: Зенкевича О.К., Клафа Р.У., Масленникова А.М., Мейснера К., Перельмутера А.В., Постнова В.А., Сливкера В.И., Хьюза Т., Шапошникова Н.Н., Bahte K.J., Gallagher R.H. и др.

Несмотря на значительный объем исследований и наличие широкого спектра программных продуктов в области компьютерного моделирования и численного анализа ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений, решение подобных инженерных задач занимает слишком много времени даже на мощных персональных компьютерах.

Целью исследования является развитие методов многомерной интерполяции и аппроксимации как инструментов математического и компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи.**

1. Разработать классификацию численного решения ДУ с помощью многомерных геометрических интерполянтов (ГИ).

2. Разработать базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях.

3. Разработать способ числовой оценки и с его помощью выполнить исследования по верификации численного решения ДУ с помощью ГИ.

4. Усовершенствовать ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и получить его численное решение с помощью ГИ, включая новый способ учёта начальных условий.

5. Усовершенствовать методику оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ.

Объект исследования – компьютерные модели ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Предмет исследования – вычислительные алгоритмы и программные средства моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации.

Научная новизна полученных результатов:

1. Впервые разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях.
2. Впервые предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ.
3. Усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы.
4. Предложен новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям.
5. Усовершенствована методика оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что получили дальнейшее развитие численные методы решения ДУ с помощью многомерных ГИ, включая новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям. Получили дальнейшее развитие методы многомерной интерполяции и аппроксимации как универсальные инструменты математического и компьютерного моделирования, применимые в любых отраслях науки и техники. Предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ, который может быть использован для сравнения любых непрерывных многомерных объектов, процессов и явлений.

Практическая значимость полученных результатов заключается в усовершенствовании инженерной методики оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы, в рамках которой был разработан комплекс программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ, включающий следующие модули:

– определение точечных и явных уравнений ГИ;

– моделирование поверхности оболочки инженерных сооружений с несовершенствами геометрической формы методами интерполяции и аппроксимации;

– численное решение ДУ с учётом начальных условий;

– числовая оценка точности результатов моделирования с помощью ГИ;

– построение, визуализация и поиск экстремумов поверхности отклика ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Практическая значимость работы подтверждается справками о внедрении результатов исследований при оценке ДС танка энергонакопителя в рамках договора №190421 от 19.04.2021 г. по теме: «Обследование танка энергонакопителя варницы №2 и выдача рекомендаций по восстановлению работоспособности танка, выявлению возможных причин аварий, разработка рекомендаций по недопущению подобной ситуации в процессе дальнейшей эксплуатации танка на территории ООО “ДПЗ”» (справка о внедрении №367 от 18.06.2021 г. выдана ООО Фирма «Промстройремонт») и в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОННАСА» (справка №11 от 18.06.2021 г. о внедрении в учебный процесс при проведении лабораторных занятий для подготовки бакалавров по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» при изучении дисциплины «Информационные технологии»).

Связь работы с научными программами, планами, темами. Исследования по теме диссертации выполнены в рамках научно-исследовательских работ ГОУ ВПО «ДОННАСА» К-2-03-16 «Предложения по: усовершенствованию учебных программ математических дисциплин в ДонНАСА; дальнейшему развитию математических моделей: механики абсолютно твёрдого и деформируемого твёрдого тела, физических явлений в кристаллах, экономических процессов; решению задач: теории детерминированных и стохастических ДУ и их систем; применению информационных технологий. Методические и учебно-методические материалы, основанные на педагогических подходах, которые развиваются на кафедре высшей математики и информатики» (номер гос. регистрации НИОКТР: 00117D000259 от 02.05.2017) и К-2-09-21 «Математическое и компьютерное моделирование многофакторных процессов и явлений» (номер гос. регистрации НИОКТР: 0121D000084 от 28.05.2021).

Методология и методы исследования. Предложенный в работе способ численного решения ДУ основан на геометрической теории многомерной интерполяции, реализованной в точечном исчислении. Способ числовой оценки точности результатов моделирования основан на использовании методов математической статистики с предварительной дискретизацией исследуемых моделей. Также используются методы математического анализа функции многих переменных для определения экстремальных точек поверхности отклика, метод вариации произвольных постоянных и общий метод решения ДУ с постоянными коэффициентами для верификации результатов численного решения ДУ ДС балки с распределенной нагрузкой и упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении соответственно.

Методы расчета и визуализации результатов моделирования реализованы с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Часть результатов исследований была обработана с помощью инструментов анализа данных MS Excel. Для сравнения результатов моделирования ДС резервуара для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы было получено эталонное решение путём аппроксимации значений перемещений от действия гидростатической нагрузки с учётом геометрической и конструктивной нелинейности при моделировании ДС в программном пакете конечно-элементного анализа SCAD. Расчёты были проведены в соответствии с прочностной теорией октаэдрических касательных напряжений (энергетическая теория Губера-Хенки-Мизера).

Положения, выносимые на защиту:

1. с помощью вычислительных экспериментов доказано, что использование базового вычислительного алгоритма численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях позволяет с высокой точностью (значения коэффициента детерминации $\tilde{R}^2 \epsilon [0{,}97; 1]$) получать искомые решения вне зависимости от количества производных, функций и независимых переменных;
2. установлено, что применение числовой оценки точности результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации позволяет получить количественную характеристику степени совпадения многофакторных процессов и явлений;
3. установлено на примере моделирования ДС эксплуатируемых стальных резервуаров для хранения нефтепродуктов, что при нахождении численного решения ДУ с помощью ГИ обеспечивается точность в пределах $\tilde{R}^2 \epsilon [0{,}97; 1]$ и уменьшается время расчета до 20 секунд даже без распараллеливания вычислительных потоков.

Степень достоверности и апробация результатов обеспечивается корректным использованием математического аппарата точечного исчисления, который основан на инвариантах аффинной геометрии и позволяет моделировать многомерные ГИ непосредственно в том пространстве, в котором они находятся. Численное решение ДУ ДС металлической балки и упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении подтверждается эталонными решениями, полученными методом вариации произвольных постоянных и общим методом решения ДУ с постоянными коэффициентами соответственно. Численная модель ДС резервуара для хранения нефтепродуктов с несовершенствами от действия гидростатической нагрузки подтверждается результатами моделирования в программном пакете конечно-элементного анализа SCAD с учётом геометрической и конструктивной нелинейностей.

Полученные результаты, положения и выводы отвечают соответствующим требованиям паспорта специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (технические науки), в частности: п.2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п.3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; п.5 «Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента или на основе анализа математических моделей»; п.8

«Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Апробация результатов диссертации. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: 84-й Международной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов «Информационные технологии» (г. Минск, 2020 г.), 30-й и 31-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению «ГрафиКон» (г. Санкт-Петербург, 2020 г.; г. Нижний Новгород, 2021 г.), 8-й Международной конференции «Физико-техническая информатика – CPT2020» (г. Москва – г. Пущино, 2020 г.), VII Республиканской конференции молодых ученых, аспирантов, студентов «Научно-технические достижения студентов, аспирантов, молодых ученых строительно-архитектурной отрасли» (г. Макеевка, 2021 г.), XII Международной научно-технической конференции «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование – 2021» (г. Донецк, 2021 г.), XXI Международной конференции «Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий» (г. Макеевка, 2022 г.).

Личный вклад. Основные научные результаты диссертации, которые включают численные методы компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений, базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях, совершенствование ДУ ДС упругой цилиндрической оболочки для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы, численные модели ДС проектируемых и эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов, методику обследования технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы, а также комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены автором лично.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ: в том числе 7 – в рецензируемых научных журналах (6 – по специальности 1.2.2), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук в Российской Федерации и Донецкой Народной Республики; 4 – по материалам научных конференций, среди которых 3 – в изданиях, индексируемых в наукометрической базе Scopus.

Структура диссертации. Диссертация общим объемом текста 141 страница, состоит из введения, четырех разделов с выводами, заключения, списка литературы из 168 наименований и 2 приложений.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит общую характеристику работы. Обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цели и задачи исследований. Показана научная новизна и практическое значение полученных результатов.

В первом разделе «Постановка проблемы и выбор метода исследований» выполнен анализ существующих подходов к решению ДУ, который показал, что по количеству независимых переменных их делят на обыкновенные ДУ (ОДУ) и ДУ в частных производных (ДУЧП). Затем уравнения классифицируют по наибольшему порядку производной (Таблица 1). Важность классификации ДУ обусловлена тем, что для каждого вида существуют своя общая теория и методы решения уравнений.

Таблица 1 – Классификация ДУ

По количеству независимых переменных		По наибольшему порядку производной	
		1-го порядка	n-го порядка
ОДУ	$y = f(x)$	$\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, или $F(x, y, y') = 0$	$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$, или $F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0$
ДУЧП	$u = f(x, y)$	$a_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$	$F\left(x, y, \dfrac{\partial u}{\partial x}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial y^n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y}\right) = 0$
	$u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$	$\sum_{i=1}^{m} a_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u)$, где $x = (x_1, ..., x_m)$	$F\left(x_1, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial x_m^n}, ..., \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \dfrac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-1} \partial x_m}\right) = 0$

Все методы решения ДУ условно можно разбить на аналитические и численные. Применение аналитических методов решения ОДУ позволяет выразить решение через элементарные функции или представить его при помощи квадратур от элементарных функций. Эти методы точны, но, чтобы решить ДУ, необходимо знать его вид и способ решения. Для нахождения аналитического решения ДУЧП используют свои методы, которые разработаны для различных типов уравнений и в некоторых простых случаях позволяют получить решение в виде некоторой формулы или сходящегося ряда.

Нахождение аналитического решения даже простого уравнения в сложной области не всегда возможно. Поэтому для решения подобных уравнений разработано множество численных методов. Для решения ОДУ достаточно часто используются такие методы, как метод Эйлера, Гюна, Рунге-Кутты, Адамса, метод прогноза и коррекции и др. Для решения задач, описываемых уравнениями в частных производных, применимы разностные методы (методы конечных элементов и суперэлементов, метод конечных объёмов, изогеометрический метод); методы, основанные на аппроксимации дифференциального оператора некоторыми выражениями; методы сведения решения ДУЧП к вариационной задаче. При этом каждому методу свойственны свои особенности и свои классы решаемых задач.

В качестве основного метода для решения поставленных задач выбрана геометрическая теория многомерной интерполяции, реализованная в точечном исчислении. Поэтому в первом разделе изложена концепция определения ГИ и их аналитическое описание в виде точечных уравнений и вычислительных алгоритмов на их основе.

Во втором разделе «Общий подход к численному решению ДУ с помощью ГИ» изложен метод численного решения ДУ с помощью ГИ, который можно отнести к категории методов конечных суперэлементов. Особенностью предложенного метода является то, что в качестве аппроксимирующей функции используется ГИ – геометрический объект, проходящий через наперёд заданные точки – узлы интерполяции. Многомерный ГИ представляет собой суперэлемент, включающий информацию о геометрических и физических параметрах его состояния. Только в данном случае узлы интерполяции вычисляются из условия соответствия исходному ДУ. Соответствие промежуточных точек исходному ДУ обеспечивается за счёт интерполяции. Чем больше узлов интерполяции, тем ближе ГИ к искомому численному решению ДУ.

Для решения ДУ выбор ГИ зависит от размерности пространства лапласиана. В классической литературе оператор Лапласа – дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ. В R^n этот оператор функции U ставит в соответствие функцию $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)U$. Исходя из этого разработана классификация решений ДУ в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбирать необходимый тип ГИ (Таблица 2).

Таблица 2 – Классификация решений ДУ по размерности лапласиана

Размерность лапласиана	Тип ГИ	Вид аппроксимирующего геометрического объекта
0	1-параметрический $U=f(x)$	кривая в R^2
1	2-параметрический $U=f(x,t)$	поверхность в R^3
2	3-параметрический $U=f(x,y,t)$	гиперповерхность в R^4
3	4-параметрический $U=f(x,y,z,t)$	гиперповерхность в R^5
…	…	…
n	$(n+1)$-параметрический $U=f(x_1,x_2,...,x_n,t)$	гиперповерхность в R^{n+2}

Использование точечных уравнений для аналитического описания ГИ, приводит к необходимости выполнения покоординатного расчёта для перехода от точечных уравнений к параметрическим. Особые свойства ГИ при численном решении ДУ на регулярной сети точек позволяют легко перейти от системы параметрических уравнений к уравнению в явном виде за счёт линейной зависимости между переменными и параметрами. При численном решении на нерегулярной сети точек добавляется дополнительный этап – решение системы ДУ методом Крамера. Например, для 3-параметрической гиперповерхности в R^4 получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial t}{\partial z}=\dfrac{\partial t}{\partial w} \end{cases}.$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}},\quad \frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}.$$

Разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях (Рисунок 1). Этот же вычислительный алгоритм может быть легко модернизирован для аппроксимации численного решения ДУ с помощью кусочно-полиномиальных функций. При этом решается глобальная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), состоящая из локальных.

Рисунок 1 – Блок-схема базового вычислительного алгоритма численного решения ДУ с помощью ГИ

Точность численного решения ДУ удобно проверять, используя методы научной визуализации, но при большом количестве переменных возникают сложности с визуализацией многомерного пространства. Поэтому для проверки точности численного решения ДУ предложен способ числовой оценки, который состоит из двух этапов. Первый этап предусматривает дискретизацию численного и эталонного решений в виде множества дискретно заданных точек, а второй – в сравнении полученных дискретных точечных множеств с помощью коэффициента детерминации. Только при его расчёте в качестве фактических значений принимаются значения одного точечного множества, соответствующего эталонному решению, а в качестве расчётных – численному решению.

В третьем разделе «Исследования по верификации численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов» предложена математическая модель расчета металлической балки при равномерно-распределенной нагрузке, выполненная путем аппроксимации численного решения ДУ геометрическими интерполянтами. Рассмотрено применение указанного метода для решения ДУ 2-го и 4-го порядков с одной независимой переменной. Для аппроксимации решения ДУ был выбран 1-параметрический ГИ, который описывает кривую в R^2. В результате установлено совпадение с высокой степенью точности на уровне полиномиальных коэффициентов численных решений ДУ предложенным методом с эталонными решениями.

Также в этом разделе приведен ряд примеров численного решения краевой задачи первого рода для уравнения Лапласа на прямоугольнике с различными вариантами краевых условий.

Пример. Найти функцию двух переменных $U = U(x, y)$, являющуюся решением уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ в прямоугольнике $0 < x < 3$, $0 < y < 5$ и удовлетворяющую на его границах следующим условиям:

$$U(0, y) = 2\sin\frac{\pi y}{5};\quad U(3, y) = 0;\quad U(x, 0) = 4\sin\frac{\pi x}{3};\quad U(x, 5) = 0.$$

Для получения эталонного решения использован метод разделения переменных:

$$U(x, y) = \frac{4sh\frac{\pi(5-y)}{3}}{sh\frac{5\pi}{3}}\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{2sh\frac{\pi(3-x)}{5}}{sh\frac{3\pi}{5}}\sin\frac{\pi y}{5}.$$

Для аппроксимации решения краевой задачи выбираем 2-параметрический ГИ, проходящий через 16 узловых точек. 12-ть точек из 16-ти определяются граничными условиями по прямоугольному контуру. Для аппроксимации решения уравнения Лапласа с учётом начальных и граничных условий необходимо будет определить ещё 4 точки таким образом, чтобы их координаты удовлетворяли краевой задаче. Тогда СЛАУ также будет состоять из 4-х уравнений. В результате аппроксимирующее уравнение принимает следующий вид:

$$U(x, y) = 0{,}030y^3x^2 - 0{,}090y^3x + 0{,}006y^2x^3 - 0{,}385y^2x^2 + 1{,}209y^2x -$$
$$-0{,}312y^2 - 0{,}028yx^3 + 1{,}523yx^2 - 4{,}837yx - 1{,}732x^2 + 1{,}559y + 5{,}196x.$$

На рисунке 2 с разных ракурсов изображены наложенные друг на друга поверхности, которые представляют графическое решение уравнения Лапласа. Зеленым цветом показан эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных, а радужным – 16-точечный отсек аппроксимирующей поверхности отклика.

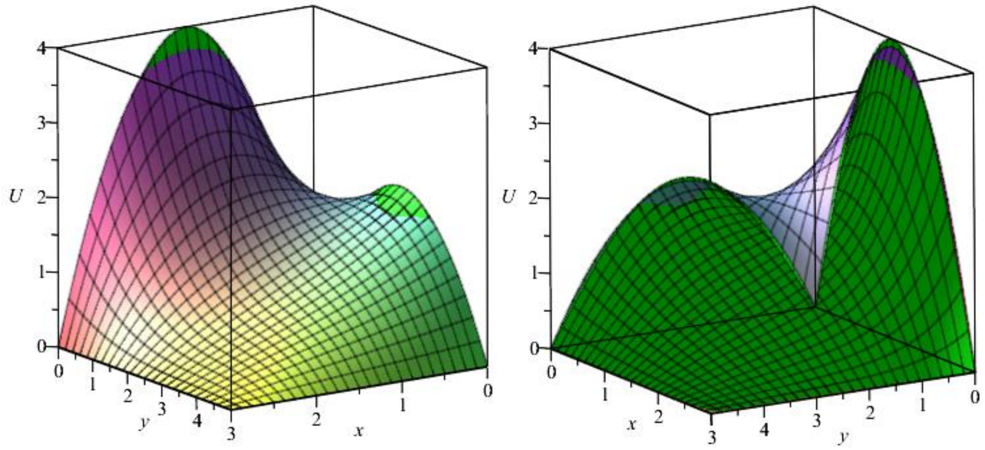


Рисунок 2 – Графическое сравнение результатов решения уравнения Лапласа

Как видно из представленного сравнения, аппроксимирующий 16-точечный отсек поверхности отклика с высокой точностью дублирует эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных. Числовая оценка результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации составила 0,968.

В четвертом разделе «Математическое моделирование деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений» с помощью вычислительных экспериментов проведен численный анализ ДС проектируемых и эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов.

В отечественной литературе широкое распространение получила модель определения ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении. Эта модель применяется в работе для анализа ДС проектируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений. Но наличие даже незначительных несовершенств геометрической формы приводят к необходимости решения задачи с учётом геометрической и конструктивной нелинейности. Поэтому возникает необходимость уточнения исходного ДУ с учётом начальных отклонений поверхности оболочки от вертикали:

$$D\frac{d^4w}{dx^4}+\frac{kEh\left(w+\delta\right)}{r^2\left(1-\dfrac{\alpha\mu}{2}\right)}=\gamma g\left(x-d\right). \qquad (1)$$

где $w=w(x)$ – искомая функция перемещений от действия гидростатической нагрузки; x – координата стенки по высоте, отсчитывая от уторного шва резервуара, м; r – радиус резервуара, м; h – толщина стенки резервуара, м; $\delta=\delta(x)$ – функция исходных отклонений резервуара от вертикали; k – поправочный коэффициент, учитывающий при расчёте геометрическую и конструктивную нелинейность, а также напряжения, возникающие в верхнем поясе оболочки за счёт её взаимодействия с крышей резервуара; $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль Юнга для стали; $\mu = 0{,}3$ – коэффициент Пуассона; α – параметр, который при одноосном напряжённом состоянии принимается равным 0, а при внутреннем газовом давлении в замкнутом цилиндрическом сосуде принимается равным 0,5; $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$ – цилиндрическая жесткость, кг·м; γ – плотность хранимой жидкости, кг/м^3; $g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение свободного падения; d – высота уровня жидкости в резервуаре, м.

Учитывая, что исходные отклонения δ и искомые перемещения w являются функциями от переменной x, математически точное решение ДУ даёт значительные погрешности (Рисунок 3), что приводит к необходимости его решения численным методом.

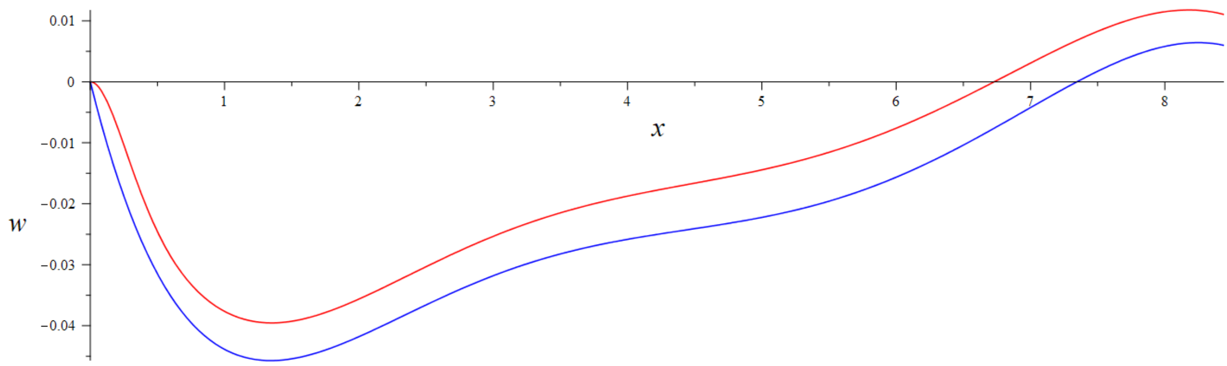


Рисунок 3 – Сравнение результатов решения ДУ: синяя линия – эталонное решение; красная линия – математически точное решение

Численное решение ДУ (1) с помощью 1-параметрического ГИ с учётом начального условия, которое заключаются в параллельном переносе решения в начало координат, имеет вид:

$$w = 4{,}19 \cdot 10^{-6} x^6 - 0{,}00017x^5 + 0{,}0025x^4 - 0{,}018x^3 + 0{,}061x^2 - 0{,}09x. \qquad (2)$$

Графическая визуализация результатов сравнения также показывает высокий уровень сходства алгебраических кривых (Рисунок 4).

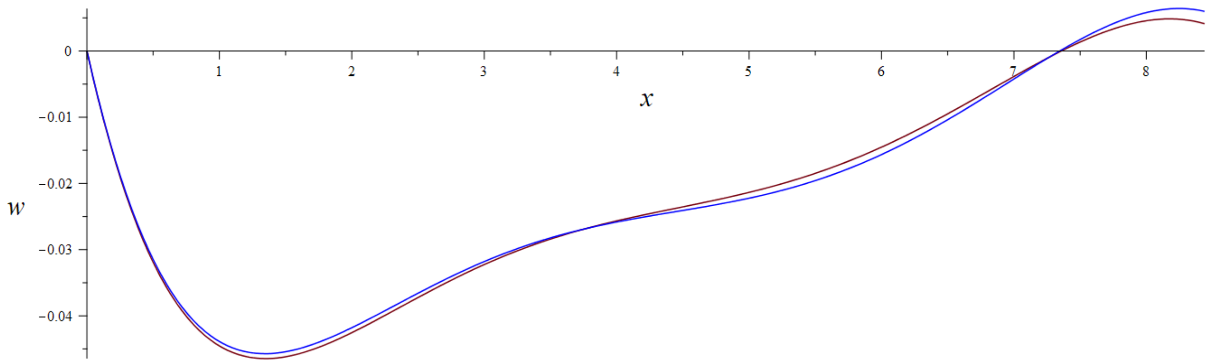


Рисунок 4 – Сравнение результатов решения ДУ (1): синяя линия – эталонное решение; коричневая линия – численное решение (2)

Числовая оценка результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации составила 0,998. Аналогичное сравнение было проведено для 12 опорных точек по окружности резервуара и получены высокие значения коэффициента детерминации, подтверждающие достоверность полученных результатов.

В результате проведения вычислительных экспериментов в программном пакете MS Excel с коэффициентом детерминации 0,983 получена зависимость поправочного коэффициента k от угла φ по окружности резервуара (Рисунок 5):

$$k = 9{,}215 \cdot 10^{-10} \varphi^4 - 6{,}203 \cdot 10^{-7} \varphi^3 + 0{,}0001\varphi^2 - 0{,}0021\varphi + 0{,}3888.$$

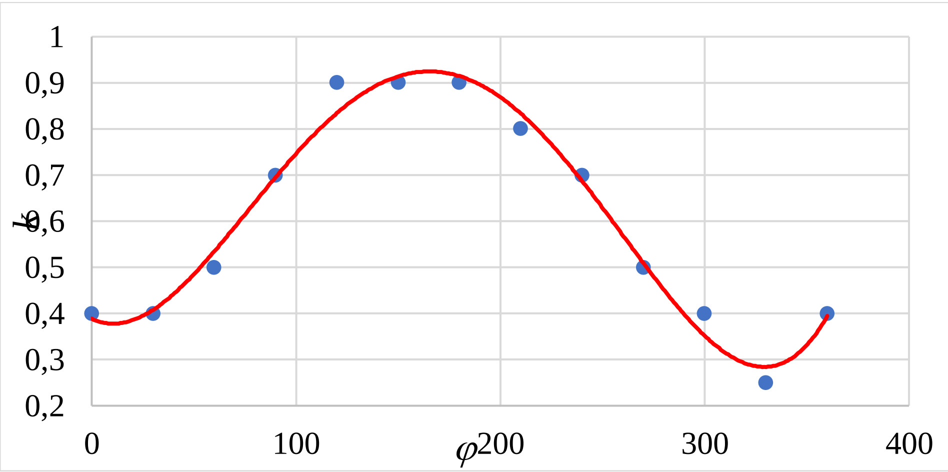


Рисунок 5 – Зависимость поправочного коэффициента k от угла φ

Для интерполяции результатов численного моделирования по сечениям резервуара, был использован вычислительный алгоритм построения одномерных обводов 1-го порядка гладкости. В результате получена поверхность отклика, характеризующая перемещения в стенке стального цилиндрического резервуара с несовершенствами (Рисунок 6).

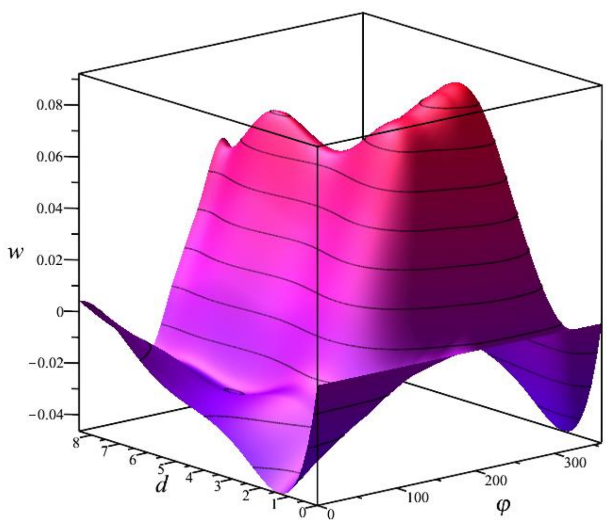


Рисунок 6 – Визуализация поверхности отклика перемещений стенки резервуара с несовершенствами от действия гидравлической нагрузки

Как видно из рисунка 6, максимальные перемещения возникают в нижней части резервуара на интервале от 150° до 300° по окружности резервуара (92,2 мм при $d = 2,298$ м и $\varphi = 258,6°$).

В результате проведенных исследований усовершенствована инженерная методика оценки технического состояния резервуара для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы от действия гидростатической нагрузки, которая предусматривает следующую последовательность действий.

1. Техническое задание на обследование резервуара.
2. Определение действительной поверхности стенки резервуара с учётом несовершенств геометрической формы.
3. Анализ исходных данных и построение действительной поверхности цилиндрического резервуара с несовершенствами.
4. Составление и решение массива ДУ.
5. Построение поверхности отклика и определение её экстремумов.
6. Разработка технических рекомендаций о возможности дальнейшей эксплуатации резервуара.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация является законченной научно-исследовательской работой, в которой получено решение актуальной научно-технической задачи, заключающейся в развитии методов многомерной интерполяции и аппроксимации для компьютерного моделирования напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Основные научные результаты и выводы, полученные при выполнении работы, состоят в следующем.

1. Проведен анализ существующих подходов к моделированию ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений и выделены их недостатки, что подтверждает актуальность выбранной темы исследований и необходимость совершенствования существующих методов компьютерного моделирования с помощью интерполяции и аппроксимации.
2. Предложена классификация численного решения ДУ в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбрать для аппроксимации ГИ.
3. Разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях. Его использование по аналогии с изогеометрическим методом, позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами. Он легко обобщается как в сторону увеличения переменных, так и в сторону увеличения порядка ДУ.
4. Разработан способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ, который позволяет получить числовую оценку степени сходства, численного и эталонного решений ДУ. Предложенный способ основан на дискретизации численного и эталонного

решений с последующим сравнением точечных множеств с помощью коэффициента детерминации.

5. Усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и получено его численное решение с помощью ГИ, что позволяет избежать необходимости проведения дорогостоящих натурных экспериментов, которые в некоторых случаях нерентабельны или невозможны.

6. Предложен новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям.

7. Усовершенствована методика оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ. При этом отсутствует необходимость выполнять долгие и сложные расчёты по моделированию тонкостенных оболочек с учётом как геометрической, так и конструктивной нелинейности.

8. Результаты исследований использованы при оценке НДС танка энергонакопителя (справка о внедрении №367 от 18.06.2021 г. выдана ООО Фирма «Промстройремонт») и внедрены в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОННАСА» (справка №11 от 18.06.2021 г.).

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

– в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК РФ и ДНР:

1. **Шевчук, О.А.** Решение дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов / О.А. Шевчук, Е.В. Конопацкий // Инф. техн. в проект. и произв. – М.: НТЦ «Компас», 2020. – №3. – С.29-33.

2. **Шевчук, О.А.** Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния балки с распределенной нагрузкой / О.А. Шевчук // Пробл. искус. интел., 2021. – №1(20). – С. 63–72.

3. **Шевчук, О.А.** Использование геометрических интерполянтов для численного решения уравнения Лапласа в прямоугольнике / О.А. Шевчук // Инф. и кибер., 2021. – №1-2(23-24). – С. 74–79.

4. Конопацкий, Е.В. Компьютерное моделирование напряжённо-деформированного состояния эксплуатируемого резервуара для хранения нефтепродуктов / Е.В. Конопацкий, **О.А. Шевчук**, А.А. Крысько // Южно-Сиб. науч. вест., 2022. – № 2. – С. 71-76.

5. Konopatskiy, E.V. Modeling of the stress-strain state of steel tank with geometric imperfections / E.V. Konopatskiy, **O.A. Shevchuk**, A.A. Krysko //

Construction of unique buildings and structures, 2022. – Issue 2(100). – DOI: 10.4123/CUBS.100.1.

6. **Шевчук, О.А.** Математическое моделирование напряжённо-деформированного состояния стальных вертикальных цилиндрических резервуаров / О.А. Шевчук // Пробл. искус. интел., 2022. – №1(24). – С. 29-38.

7. Конопацкий, Е.В. Численное моделирование напряжённо-деформированного состояния металлоконструкций с помощью геометрических интерполянтов / Е.В. Конопацкий, **О.А. Шевчук** // Автомат. и модел. в проект. и управл., 2022. – № 2(16). – С. 61-71. – DOI: 10.30987/2658-6436-2022-2-61-71.

– в научных изданиях, индексируемых в базе SCOPUS:

8. Konopatskiy, E.V. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants / E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, **O.A. Shevchuk**, A.A. Bezditnyi. – Proc. of the 8th Int. Sci. Conf. on Comp. in Phys. and Techn. (CPT 2020) Moscow, November 9-13, 2020. – Vol. 2763. – pp. 213-219. – DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.

9. Konopatskiy, E.V. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application / E.V. Konopatskiy, A.A. Bezditnyi, **O.A. Shevchuk** // Proc. of the 30th Int. Conf. on Comp. Graphics and Machine Vision, (GraphiCon 2020) Saint Petersburg, September 22-25, 2020. – Vol. 2744. – DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.

10. An approach to comparing multidimensional geometric objects / I.V. Seleznev, E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, **O.A. Shevchuk**, A.A. Bezditnyi // Proc. of the 31th Int. Conf. on Comp. Graphics and Machine Vision (GraphiCon 2021) Nizhny Novgorod, September 27-30, 2021. – Vol. 3027. – pp. 682-688. – DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-682-688.

– по материалам конференций:

11. Конопацкий, Е.В. Использование геометрических интерполянтов для численного решения дифференциальных уравнений / Е.В. Конопацкий, **О.А. Шевчук** // Инф. техн.: мат. 84-й науч.-техн. конф. проф.-преп. состава, науч. сотр. и асп. (с межд. уч.), Минск, 3-15 февраля 2020 года. – Минск: БГТУ, 2020. – С.194-196.

Личный вклад соискателя в публикациях: [1] – предложена классификация численного решения ДУ в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбрать для аппроксимации ГИ; [4, 5, 7] – усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы; предложен новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям; разработана компьютерная модель, на основе которой выполнены экспериментальные исследования деформированного состояния эксплуатируемого резервуара для хранения нефтепродуктов; [8, 9] – выполнено теоретическое обоснование численного решения дифференциальных уравнений с помощью ГИ; [10] – предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ; [11] – разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ.

АННОТАЦИЯ

Шевчук О. А. **Математическое моделирование деформированного состояния тонкостенных оболочек с помощью геометрических интерполянтов.** – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (технические науки) – ГОУВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ», Донецк, 2023 г.

Диссертация посвящена развитию методов многомерной интерполяции и аппроксимации для численного решения ДУ и разработки компьютерных моделей ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Ядром работы служит базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях. На его основе проведены вычислительные эксперименты по численному моделированию ДС металлической балки с различными краевыми условиями, а также проектируемых и эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов, формирующие комплекс программного обеспечения, реализованного в интерпретаторе Maple. При этом усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и предложен новый подход к учёту начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям. Результатом этих исследований является усовершенствованная методика оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы с помощью комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ.

Ключевые слова: компьютерная модель, интерполяция, аппроксимация, дифференциальное уравнение, геометрический интерполянт, численное решение, деформированное состояние, тонкостенная оболочка.

ANNOTATION

Shevchuk O. A. **Mathematical modeling of the deformed state of thin-wall shells using geometric interpolants.** – A manuscript.

Thesis for the degree of Candidate of Technical Sciences in the specialty 1.2.2. “Mathematical modeling, numerical methods and software complexes” (technical science) – STATE HIGHER EDUCATION ESTABLISHMENT «DONETSK NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY», Donetsk, 2023.

This dissertation is devoted to the development of multidimensional interpolation and approximation methods for the numerical solution of differential equations and the development of computer models of the deformed state of thin-walled shells of engineering structures.

The core of the work is a fundamental computational algorithm for the numerical solution of differential equations using geometric interpolants on regular and irregular networks. On its basis the computational experiments of the numerical simulation of the deformed state of the metal beam with different boundary conditions, as well as the designed and operated tanks for petroleum products storage, forming a set of software implemented in the interpreter Maple. At the same time the differential equation of modeling the deformed state of an elastic cylindrical shell under axisymmetric loading has been improved for the numerical analysis of the deformed state of a cylindrical tank with geometrical imperfections. Also, a new approach to taking into account the initial conditions of the differential equation has been suggested, which consists in the parallel transfer of a numerical solution to a desired point, the coordinates of which correspond to the initial conditions. The result of these studies is an improved methodology for analyzing of the technical condition of storage tanks for petroleum products with regard to the imperfections of the geometric form using a complex of computer simulation programs of the deformed state of thin-walled shells of engineering structures based on the numerical solution of differential equations using geometric interpolants.

Keywords: computer model, interpolation, approximation, differential equation, geometric interpolant, numerical solution, deformed state, thin-walled shell.