

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И
АРХИТЕКТУРЫ»

На правах рукописи



УДК 004.94

Шевчук Оксана Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

Специальность 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ» (технические науки)

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:

доктор технических наук, доцент

Конопацкий Е.В.



Идентичность всех экземпляров

ПОДТВЕРЖДАЮ

Ученый секретарь диссертационного
совета 02.2.006.02

кандидат технических наук, доцент



2023



Т.В. Завадская

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
РАЗДЕЛ 1 ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ВЫБОР МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЙ.....	15
1.1 Анализ существующих подходов к моделированию тонкостенных оболочек инженерных сооружений.....	15
1.2 Анализ и систематизация дифференциальных уравнений по способу их решения	17
1.2.1 Классификация обыкновенных дифференциальных уравнений	19
1.2.2 Классификация дифференциальных уравнений в частных производных	20
1.2.3 Методы решения дифференциальных уравнений	25
1.3 Основы геометрической теории многомерной интерполяции	28
1.4 Выводы по разделу 1.....	37
РАЗДЕЛ 2 ОБЩИЙ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ	38
2.1 Теоретические основы численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов	38
2.1.1 Модификация полиномов Бернштейна для аналитического описания геометрических интерполянтов	39
2.1.2 Классификация численных решений ДУ в зависимости от размерности лапласиана	42
2.1.2 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью 1-параметрических геометрических интерполянтов	44
2.1.3. Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 2-параметрических геометрических интерполянтов	45

2.1.4 Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 3-параметрических геометрических интерполянтов	47
2.1.5 Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 4-параметрических геометрических интерполянтов	49
2.2 Базовый вычислительный алгоритм решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов	50
2.3 Особенности численного решения дифференциальных уравнений на нерегулярных сетях	52
2.3.1 Покоординатный расчет для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью 1-параметрических геометрических интерполянтов ...	52
2.3.2 Покоординатный расчет для решения дифференциальных уравнений с помощью 2-параметрических геометрических интерполянтов	53
2.3.3 Обобщение процедуры покоординатного расчета для численного решения ДУ с помощью многопараметрических геометрических интерполянтов	55
2.4 Критерий оценки точности результатов численного моделирования с помощью многомерных геометрических интерполянтов	57
2.5 Выводы по разделу 2	61
РАЗДЕЛ 3 ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ВЕРИФИКАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ	63
3.1 Моделирование напряженно-деформированного состояния шарнирно-опертой на двух концах балки с распределенной нагрузкой	63
3.2 Численное решение уравнения Лапласа в прямоугольнике	70
3.3 Выводы по разделу 3	77

РАЗДЕЛ 4 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ	79
4.1 Моделирование деформированного состояния проектируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений	79
4.1.1 Определение ДС резервуара аналитическим способом	80
4.1.2 Определение ДС резервуара методами геометрического моделирования	81
4.1.3 Исходные данные для проведения вычислительных экспериментов	82
4.1.4 Анализ результатов моделирования деформированного состояния резервуара.....	83
4.2 Моделирование деформированного состояния эксплуатируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений	86
4.2.1 Составление дифференциального уравнения равновесия элемента цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы....	88
4.2.2 Описание метода численного решения дифференциального уравнения с помощью однопараметрического геометрического интерполянта	92
4.2.3 Исходные данные для проведения вычислительных экспериментов	95
4.2.4 Анализ результатов моделирования деформированного состояния эксплуатируемого резервуара для хранения нефтепродуктов	97
4.2.5 Определение перемещений стенки цилиндрического резервуара с несовершенствами от действия гидростатической нагрузки с помощью двумерной интерполяции	100
4.2.6 Методика оценки технического состояния резервуара для хранения нефтепродуктов с учетом несовершенств геометрической формы	104
4.3 Выводы по разделу 4.....	108
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	111

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	114
ПРИЛОЖЕНИЕ А ДОКУМЕНТЫ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИИ.....	133
ПРИЛОЖЕНИЕ Б ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ.....	135

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В инженерной практике широкое распространение получили стальные тонкостенные оболочки вращения: газгольдеры, силосы, трубопроводы больших диаметров, дымовые и вентиляционные трубы, водонапорные башни, вертикальные цилиндрические резервуары. В процессе эксплуатации тонкостенные оболочки изменяют свою первоначальную идеализированную геометрическую форму под действием объективных и субъективных факторов, к которым относятся: нагрузки (собственный вес конструкции, гидростатическое давление, вакуум, ветровая и снеговая нагрузки); погрешности изготовления, транспортировки и монтажа; нарушение условий эксплуатации. Имеющиеся случаи разрушения приведенных выше инженерных сооружений привели к необходимости периодического мониторинга их технического состояния в течение всего периода эксплуатации. Среди методов диагностики технического состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений с несовершенствами геометрической формы наибольшее распространение получили методы конечно-элементного анализа их деформированного состояния (ДС). При этом процесс моделирования включает геометрическое моделирование поверхности оболочки с несовершенствами и численное моделирование ДС оболочки. Такой подход обладает рядом недостатков. Во-первых, численный расчёт ДС оболочки выполняется достаточно долго. Например, расчёт ДС резервуара для хранения нефтепродуктов, содержащий 65854 конечных элементов в виде прямоугольных пластин с учётом геометрической и конструктивной нелинейности занял более 25 часов на компьютере под управлением процессора Intel Core i5-2400, что для выполнения инженерных изысканий как минимум неудобно. Причём 99 % этого времени занимает именно численный расчёт ДС оболочки. Во-вторых, возникают сложности учёта конструктивной нелинейности, приводящей к необходимости реализации особой схемы поэтапного нагружения оболочки под действием гидростатической нагрузки. Во избежание указанных недостатков достаточно эффективно использовать такие инструменты математического моделирования,

как многомерная интерполяция и аппроксимация. Их применение для нахождения численного решения дифференциальных уравнений (ДУ) и обработки полученных результатов моделирования позволит обеспечить достаточную для инженерных расчётов точность и значительно повысить быстродействие вычислений.

Исходя из вышеизложенного, разработка новых и совершенствование существующих численных методов компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений является актуальной научной задачей, имеющей важное отраслевое значение.

Степень разработанности темы исследования. Теоретической базой для проведения исследований стали работы ведущих ученых и их учеников:

– в области численного решения ДУ в частных производных: Березина И.С., Бут Э. Д., Золотова А. Б., Калиткина Н.Н., Павлыша В.Н., Самарского А.А., Смирнова В.А., Тихонова А.Н., Хемминга Р.В. и др.;

– в области моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений: Авдоница А.С., Власова В.З., Вольмира А.С., Лессига Е.Н., Муцанова В.Ф., Новожилова В.В., Сафаряна М.К., Тарасенко А.А., Тимошенко С.П. и др.;

– в области многомерной интерполяции и аппроксимации: Бахвалова Ю.Н., Бутырского Е.Ю., Голубинского А.Н., Квасова Б.И., Buhmann M.D., Micchelli C.A., Wendland H. и др.;

– в области конечно-элементного анализа: Зенкевича О.К., Клафа Р.У., Масленникова А.М., Мейснера К., Перельмутера А.В., Постнова В.А., Сливкера В.И., Хьюза Т., Шапошникова Н.Н., Bahte K.J., Gallagher R.H. и др.

Несмотря на значительный объем исследований и наличие широкого спектра программных продуктов в области компьютерного моделирования и численного анализа ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений, решение подобных инженерных задач занимает слишком много времени даже на мощных персональных компьютерах.

Целью исследования является развитие методов многомерной интерполяции и аппроксимации как инструментов математического и компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи.**

1. Разработать классификацию численного решения ДУ с помощью многомерных геометрических интерполянтов (ГИ).

2. Разработать базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях.

3. Разработать способ числовой оценки и с его помощью выполнить исследования по верификации численного решения ДУ с помощью ГИ.

4. Усовершенствовать ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и получить его численное решение с помощью ГИ, включая новый способ учёта начальных условий.

5. Усовершенствовать методику оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ.

Объект исследования – компьютерные модели ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Предмет исследования – вычислительные алгоритмы и программные средства моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений с помощью многомерной интерполяции и аппроксимации.

Научная новизна полученных результатов:

1. Впервые разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях.

2. Впервые предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ.

3. Усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы.

4. Предложен новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям.

5. Усовершенствована методика оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ.

Теоретическая значимость работы состоит в том, что получили дальнейшее развитие численные методы решения ДУ с помощью многомерных ГИ, включая новый способ учёта начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям. Получили дальнейшее развитие методы многомерной интерполяции и аппроксимации как универсальные инструменты математического и компьютерного моделирования, применимые в любых отраслях науки и техники. Предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных ГИ, который может быть использован для сравнения любых непрерывных многомерных объектов, процессов и явлений.

Практическая значимость полученных результатов заключается в усовершенствовании инженерной методики оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с несовершенствами геометрической формы, в рамках которой был разработан комплекс программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью ГИ, включающий следующие модули:

– определение точечных и явных уравнений ГИ;

- моделирование поверхности оболочки инженерных сооружений с несовершенствами геометрической формы методами интерполяции и аппроксимации;
- численное решение ДУ с учётом начальных условий;
- числовая оценка точности результатов моделирования с помощью ГИ;
- построение, визуализация и поиск экстремумов поверхности отклика ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Практическая значимость работы подтверждается справками о внедрении результатов исследований при оценке ДС танка энергоаккумулятора в рамках договора №190421 от 19.04.2021 г. по теме: «Обследование танка энергоаккумулятора варницы №2 и выдача рекомендаций по восстановлению работоспособности танка, выявлению возможных причин аварий, разработка рекомендаций по недопущению подобной ситуации в процессе дальнейшей эксплуатации танка на территории ООО «ДПЗ»» (справка о внедрении №367 от 18.06.2021 г. выдана ООО Фирма «Промстройремонт») и в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОННАСА» (справка №11 от 18.06.2021 г. о внедрении в учебный процесс при проведении лабораторных занятий для подготовки бакалавров по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» при изучении дисциплины «Информационные технологии»).

Связь работы с научными программами, планами, темами. Исследования по теме диссертации выполнены в рамках научно-исследовательских работ ГОУ ВПО «ДОННАСА» К-2-03-16 «Предложения по: усовершенствованию учебных программ математических дисциплин в ДонНАСА; дальнейшему развитию математических моделей: механики абсолютно твёрдого и деформируемого твёрдого тела, физических явлений в кристаллах, экономических процессов; решению задач: теории детерминированных и стохастических ДУ и их систем; применению информационных технологий. Методические и учебно-методические материалы, основанные на педагогических подходах, которые развиваются на кафедре высшей математики и информатики» (номер гос. регистрации НИОКТР:

00117D000259 от 02.05.2017) и К-2-09-21 «Математическое и компьютерное моделирование многофакторных процессов и явлений» (номер гос. регистрации НИОКТР: 0121D000084 от 28.05.2021).

Методология и методы исследования. Предложенный в работе способ численного решения ДУ основан на геометрической теории многомерной интерполяции, реализованной в точечном исчислении. Способ числовой оценки точности результатов моделирования основан на использовании методов математической статистики с предварительной дискретизацией исследуемых моделей. Также используются методы математического анализа функции многих переменных для определения экстремальных точек поверхности отклика, метод вариации произвольных постоянных и общий метод решения ДУ с постоянными коэффициентами для верификации результатов численного решения ДУ ДС балки с распределенной нагрузкой и упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении соответственно.

Методы расчета и визуализации результатов моделирования реализованы с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Часть результатов исследований была обработана с помощью инструментов анализа данных MS Excel. Для сравнения результатов моделирования ДС резервуара для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств геометрической формы было получено эталонное решение путём аппроксимации значений перемещений от действия гидростатической нагрузки с учётом геометрической и конструктивной нелинейности при моделировании ДС в программном пакете конечно-элементного анализа SCAD. Расчёты были проведены в соответствии с прочностной теорией октаэдрических касательных напряжений (энергетическая теория Губера-Хенки-Мизера).

Положения, выносимые на защиту:

1. с помощью вычислительных экспериментов доказано, что использование базового вычислительного алгоритма численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях позволяет с высокой точностью

(значения коэффициента детерминации $\tilde{R}^2 \in [0,97; 1]$) получать искомые решения вне зависимости от количества производных, функций и независимых переменных;

2. установлено, что применение числовой оценки точности результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации позволяет получить количественную характеристику степени совпадения многофакторных процессов и явлений;

3. установлено на примере моделирования ДС эксплуатируемых стальных резервуаров для хранения нефтепродуктов, что при нахождении численного решения ДУ с помощью ГИ обеспечивается точность в пределах $\tilde{R}^2 \in [0,97; 1]$ и уменьшается время расчета до 20 секунд даже без распараллеливания вычислительных потоков.

Степень достоверности и апробация результатов обеспечивается корректным использованием математического аппарата точного исчисления, который основан на инвариантах аффинной геометрии и позволяет моделировать многомерные ГИ непосредственно в том пространстве, в котором они находятся. Численное решение ДУ ДС металлической балки и упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении подтверждается эталонными решениями, полученными методом вариации произвольных постоянных и общим методом решения ДУ с постоянными коэффициентами соответственно. Численная модель ДС резервуара для хранения нефтепродуктов с несовершенствами от действия гидростатической нагрузки подтверждается результатами моделирования в программном пакете конечно-элементного анализа SCAD с учётом геометрической и конструктивной нелинейностей.

Полученные результаты, положения и выводы отвечают соответствующим требованиям паспорта специальности 1.2.2. «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (технические науки), в частности: п.2 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п.3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-

ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»; п.5 «Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей»; п.8 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Апробация результатов диссертации. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: 84-й Международной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов «Информационные технологии» (г. Минск, 2020 г.), 30-й и 31-й Международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению «ГрафиКон» (г. Санкт-Петербург, 2020 г.; г. Нижний Новгород, 2021 г.), 8-й Международной конференции «Физико-техническая информатика – СРТ2020» (г. Москва – г. Пущино, 2020 г.), VII Республиканской конференции молодых ученых, аспирантов, студентов «Научно-технические достижения студентов, аспирантов, молодых ученых строительной-архитектурной отрасли» (г. Макеевка, 2021 г.), XII Международной научно-технической конференции «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование – 2021» (г. Донецк, 2021 г.), XXI Международной конференции «Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий» (г. Макеевка, 2022 г.).

Личный вклад. Основные научные результаты диссертации, которые включают численные методы компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений, базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью ГИ на регулярных и нерегулярных сетях, совершенствование ДУ ДС упругой цилиндрической оболочки для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы, численные модели ДС проектируемых и эксплуатируемых резервуаров для хранения нефтепродуктов, методику обследования технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с учётом несовершенств

геометрической формы, а также комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов получены автором лично.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ: в том числе 7 – в рецензируемых научных журналах (6 – по специальности 1.2.2), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук в Российской Федерации и Донецкой Народной Республики; 4 – по материалам научных конференций, среди которых 3 – в изданиях, индексируемых в наукометрической базе Scopus.

Структура диссертации. Диссертация общим объемом текста 141 страница, состоит из введения, четырех разделов с выводами, заключения, списка литературы из 168 наименований и 2 приложений.

РАЗДЕЛ 1

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ И ВЫБОР МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1 Анализ существующих подходов к моделированию тонкостенных оболочек инженерных сооружений

В инженерной практике строительства различных конструкций, зданий и сооружений широкое распространение получила теория оболочек. Она относится к разделу механики деформируемого твердого тела и изучает напряжённо-деформированное состояние тела, являющегося оболочкой или пластиной.

Основоположником теории пологих оболочек является советский ученый Власов В.З. [24, 25, 26]. При помощи введения ряда предположений относительно геометрии и характера напряженно-деформированного состояния пологой оболочки задача расчета устойчивости была сведена им к решению разрешающей системы двух уравнений, где неизвестными служат функция нормального перемещения (прогиба) w и функция напряжений φ . Также ученым был разработан метод расчета оболочек, срединная поверхность которых образована вращением кривых второго порядка. Автор впервые обратил внимание на существенное различие оболочек положительной и отрицательной Гауссовой кривизны при расчете их по безмоментной теории.

В работе [36] Гольденвейзер А.Л. рассматривает метод асимптотического интегрирования как универсальный прием. С одной стороны этот метод позволяет строить приближенные решения задач теории оболочек. С другой – классифицировать данные задачи с качественной стороны, обнаруживая при этом возможности упрощения общих уравнений теории оболочек, допустимые в тех или иных конкретных случаях.

В работах Тимошенко С.П. [122, 123] рассматривалась устойчивость круговой цилиндрической оболочки при различных вариантах нагрузки и устойчивость замкнутой сферической оболочки под действием равномерного нормального давления.

Муштари Х.М. и Галимов К.З. занимались развитием геометрически нелинейной теории оболочек и решением ее конкретных задач [82, 83, 84]. Большой цикл работ Муштари Х.М. посвящен теории трехслойных оболочек несимметричного строения. Наружные несущие слои таких оболочек и пластин разнесены за счет среднего слоя (заполнителя). Они обладают большой жесткостью при относительно малом весе и имеют на порядок большую тепло- и звукоизоляцию по сравнению с однослойной оболочкой и пластиной того же веса [85, 86, 87, 88]. Галимов К.З. предложил различные вариационные методы решения задач нелинейной теории оболочек, доказал вариационную теорему смешанного типа для общей нелинейной теории оболочек [30, 31, 32].

Методы функционального анализа к оболочкам применил Ворович И.И. [27, 28]. Это позволило ему доказать существование решений уравнений геометрически нелинейной теории оболочек и дать оценку погрешности некоторых прямых методов при использовании их для решения этих уравнений.

Новожиловым В.В. [92, 93] предложен комплексный метод теории оболочек, который позволил существенно упростить вид разрешающих уравнений. Это дало возможность выявить структуру основных зависимостей и провести их анализ.

Значительная часть задач о симметричных оболочках и воздействиях, в том числе о силовом и температурном краевом эффекте рассмотрена авторами в [73].

В работах Даревского В.М. [38, 39, 41] проведены исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек при действии сосредоточенных и локальных нагрузок. Автор дал строгое решение основных дифференциальных уравнений теории цилиндрических оболочек, соответствующее нагрузке равномерно распределенной по прямоугольному элементу боковой поверхности оболочки, ограниченному отрезками линии кривизны. Для получения решений, соответствующих сосредоточенным нагрузкам, Даревским В.М. осуществлялся предельный переход.

В работе Болотина В.В. [19] рассмотрен подробный анализ методов динамического расчета для оболочек различных форм. Автор уделял большое внимание обсуждению методов непосредственного интегрирования

дифференциальных уравнений движения оболочек. На основе теории Болотина В.В. решены задачи расчета оболочек под действием динамических нагрузок.

Проведенный анализ существующих подходов к моделированию тонкостенных оболочек инженерных сооружений показал, что все они сводятся к решению дифференциальных уравнений и систем на их основе.

1.2 Анализ и систематизация дифференциальных уравнений по способу их решения

Инженерные исследования динамики процессов, протекающих в механизмах, реакторах, локальных системах стабилизации параметров технологических процессов, трубопроводах, теплообменных процессах и других инженерных объектах приводят к дифференциальным уравнениям.

Для того чтобы правильно выбрать метод решения дифференциального уравнения, следует определить, к какому виду оно относится. Сначала указанные уравнения классифицируют по таким критериям: количеству независимых переменных и наибольшему порядку производной. Если неизвестная функция является функцией одной переменной, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным (ОДУ). Если же неизвестная функция есть функция многих переменных, то дифференциальное уравнение называют уравнением в частных производных (ДУЧП) [23, 76].

Затем определяют порядок дифференциального уравнения как максимальный порядок входящей в уравнение производной неизвестной функции. В таблице 1.1 представлена классификация дифференциальных уравнений. Далее каждый из предложенных вариантов классификации делится на виды.

Важность классификации ДУ обусловлена тем, что для каждого вида существуют своя общая теория и методы решения уравнений.

Таблица 1.1 – Классификация дифференциальных уравнений

По количеству независимых переменных		По наибольшему порядку производной		
		1-го порядка	2-го порядка	n -го порядка
ОДУ	$y = f(x)$	$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, или $F(x, y, y') = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$, или $F(x, y, y', y'') = 0$	$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, или $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
	$u = f(x, y)$	$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u)$	$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$	$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y}\right) = 0$
ДУЧП	$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$	$\sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f(x, u)$, $z \text{ где } x = (x_1, \dots, x_m)$	$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x_1, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0$	$F\left(x_1, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_m^n}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{n-1} \partial x_m}\right) = 0$

1.2.1 Классификация обыкновенных дифференциальных уравнений

Сначала рассмотрим виды *обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка*.

Дифференциальные уравнения первого порядка могут быть разрешены относительно производной:

– уравнения с разделяющимися переменными вида $f_1(y) \cdot g_1(x)dy = f_2(y) \cdot g_2(x)dx$ или $f_1(y) \cdot g_1(x) \cdot y' = f_2(y) \cdot g_2(x)$;

– уравнениями с разделенными переменными $f(y)dy = g(x)dx$;

– линейные неоднородные дифференциальные уравнения $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$;

– линейные однородные дифференциальные уравнения, имеющие вид $y' + P(x) \cdot y = 0$;

– уравнения Бернулли $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha, \alpha \neq 1$;

– уравнения в полных дифференциалах $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной, $F(x, y, y') = 0$ в свою очередь делятся на:

– уравнения, не содержащие аргумент x и функцию y , т.е. вида $F(y') = 0$;

– уравнения, не содержащие функцию y , т.е. вида $F(x, y') = 0$;

– уравнения, не содержащие аргумент x , т.е. вида $F(y, y') = 0$;

– уравнения, разрешенные относительно функции y , а именно:

- уравнения Клеро $y = y'x + f(y')$;

- уравнения Лагранжа $y = f(y')x + p(y')$;

- уравнения, приводящиеся к уравнению Бернулли $y = xy' + x^\alpha f(y')$ и $y = xy' + y^\alpha f(y')$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка традиционно делят на следующие виды:

– линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0, p, q \in R$;

– линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in R$;

– линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ) второго порядка $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$;

– линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ) второго порядка $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$.

Рассмотрим виды *обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка*:

– дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

- уравнения, решаемые непосредственным интегрированием $y^{(n)} = f(x)$;

- уравнения, не содержащие зависимую переменную y в явном виде $f(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$;

- уравнения, не содержащие независимую переменную x в явном виде $f(y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$;

- уравнения, однородные относительно y, y', y'', \dots $f\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \frac{y'''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$;

– линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_1 \cdot y' + f_0 \cdot y = 0$ и $y^{(n)} + f_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_1 \cdot y' + f_0 \cdot y = f(x)$;

– линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков $y^{(n)} + f_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = 0$ и $y^{(n)} + f_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = f(x)$.

1.2.2 Классификация дифференциальных уравнений в частных производных

Очень многие физические явления описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Важность классификации ДУПЧ

обусловлена тем, что для каждого класса существует своя общая теория и методы решения уравнений.

Дифференциальные уравнения в частных производных можно классифицировать по многим признакам.

По порядку ДУЧП делятся на:

– уравнения 1-го порядка

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y, u);$$

– уравнения 2-го порядка

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

– уравнения n -го порядка

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial y^n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1} \partial y}\right) = 0.$$

По числу независимых переменных ДУЧП могут быть:

– уравнениями с двумя переменными

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

– уравнениями с тремя переменными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

– уравнениями с m переменными

$$\sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x)u + f(x), \text{ где } x = (x_1, \dots, x_m).$$

В зависимости от того, как неизвестная функция и ее частные производные входят в ДУЧП различают линейные, квазилинейные и нелинейные уравнения.

Если неизвестная функция $u(x)$ и все ее частные производные входят в уравнение линейно, то уравнение называется *линейным уравнением в частных производных*. Так, уравнение

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_m} + c(x) \cdot u = f(x), \quad (1.1)$$

где $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ и $f(x)$ – заданные функции точки $x = (x_1, \dots, x_m)$, описывает общий вид *линейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка* с m переменными (относительно неизвестной функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$).

Если только частные производные неизвестной функции входят в уравнение линейно, то уравнение называется *квазилинейным уравнением в частных производных*. Уравнение

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) = 0$$

описывает общий вид *квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных 2-го порядка* с m переменными [9, 23, 125].

Уравнение в частных производных называется *нелинейным уравнением в частных производных*, если его нельзя представить в виде линейного или квазилинейного уравнения.

Примером нелинейных уравнений в частных производных являются уравнение Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

и уравнение Кортевега-де Фриза [9]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Если правая часть уравнения (1.1) $f(x) \equiv 0$ в рассматриваемой области, то ДУЧП называется однородным, в противном случае – неоднородным [128].

Дифференциальные уравнения в частных производных классифицируются по виду коэффициентов. Если коэффициенты уравнения (1.1) $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ – константы, то ДУЧП называется *уравнением с постоянными коэффициентами*; в противном случае *уравнением с переменными коэффициентами*.

Рассмотрим симметричную матрицу старших коэффициентов приведенного уравнения (1.1)

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1m}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mm}(x) \end{pmatrix}.$$

Из алгебры известно, что у такой матрицы существуют m действительных собственных значений (учитывая кратность) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Обозначим m^+ – количество положительных собственных значений, m^- – количество отрицательных собственных значений, m^0 – количество нулевых собственных значений [9, 23, 76].

Выделяют следующие типы линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с m переменными:

- *эллиптического типа*, если $m^+ = m$ или $m^- = m$;
- *гиперболического типа*, если $m^+ = m - 1, m^- = 1$ или $m^+ = 1, m^- = m - 1$;
- *ультрагиперболического типа*, если $m^+ > 1, 1 < m^- < m - 1, m^0 = 0$;
- *параболического типа*, если $m^0 \neq 0$;
- *нормальнопараболического типа*, если $m^0 \neq 0$ и одно из чисел m^+ или m^- равно $(m - 1)$.

В классической литературе теории дифференциальных уравнений в частных производных особым блоком выделены уравнения в частных производных второго порядка от двух независимых переменных. Это связано с использованием последних для математического моделирования и описания различных физических задач. Эти уравнения называются дифференциальными уравнениями математической физики.

Общепринята следующая классификация уравнений в частных производных второго порядка двух переменных. Пусть $u(x, y)$ – функция двух независимых переменных, a_{11}, a_{12}, a_{22} – заданные функции переменных x и y . Тогда дифференциальное уравнение

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

линейно относительно старших производных и называется уравнением:

- *эллиптического типа*, если дискриминант $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} < 0$;
- *параболического типа*, если $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} = 0$;
- *гиперболического типа*, если $a_{12}^2 - a_{11} \cdot a_{22} > 0$.

Следует отметить, что указанная классификация уравнений в частных производных второго порядка двух переменных является частным случаем дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка с m переменными ($m = 2$).

При решении дифференциальных уравнений обычно не стремятся найти общее решение, поскольку оно скорее всего окажется слишком общим, чтобы быть полезным. Особенности конкретной задачи устанавливаются заданием дополнительных условий, выделяющих эту задачу из всех остальных. Такими дополнительными условиями являются краевые условия – начальные и граничные условия. Соответствующая задача называется краевой задачей.

В зависимости от способа задания дополнительных условий ОДУ разделяются на:

- задачи Коши (дополнительные условия задаются при одном значении независимой переменной);
- краевые задачи (дополнительные условия задаются при двух и более значениях независимой переменной);
- задачи на собственные значения (краевые задачи для системы ОДУ, в которой правые части зависят от одного или нескольких параметров).

Для ДУЧП различают три основных типа краевых задач:

- задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов (задаются начальные условия, граничные условия отсутствуют);
- краевая задача для уравнений эллиптического типа (задаются граничные условия, начальные условия отсутствуют);

– смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов (задаются и начальные условия, и граничные условия) [9].

1.2.3 Методы решения дифференциальных уравнений

Все методы решения ДУ условно можно разбить на аналитические и численные [52, 77].

Применение аналитических методов решения ОДУ позволяет выразить решение через элементарные функции, или представить его при помощи квадратур от элементарных функций. Эти методы точны, однако, чтобы решить ДУ, необходимо знать вид дифференциального уравнения и способ его решения [77, 116].

Для нахождения аналитического решения ДУЧП используют свои способы, например: функцию Грина [9, 108], формулу Кирхгофа, метод разделения переменных Фурье [108, 111], теорию потенциала [23, 125]. Эти методы разработаны для различных типов уравнений и в некоторых простых случаях позволяют получить решение в виде некоторой формулы или сходящегося ряда.

Нахождение аналитического решения даже простого уравнения в сложной области не всегда возможно. Поэтому для решения подобных уравнений разработано множество численных методов.

Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений являются одним из важнейших приложений теории дифференциальных уравнений. Достаточно часто используются как одношаговые методы – метод Эйлера, метод Гюна, метод Рунге-Кутты [10, 77, 108] – так и многошаговые – метод Адамса, метод прогноза и коррекции и др. [52, 108].

Основным их недостатком является то, что они могут дать только некоторое частное решение. Преимуществом же этих методов является применимость к широким классам уравнений и всем типам задач для них.

Для решения задач, описываемых уравнениями в частных производных, применимы различные численные методы [17, 54, 80, 95, 108]. При этом каждому методу свойственны свои особенности и свои классы решаемых задач.

Наибольшее распространение получили разностные методы [34, 48, 49, 108, 111, 125, 133] (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод конечных объемов), которые обладают универсальностью и дискретным представлением с использованием ленточной матрицы.

Метод конечных разностей (МКР) широко освещен в работах [1, 2, 4, 5, 7, 8, 18, 19, 21, 22, 43, 50, 75, 89, 90, 97]. МКР основан на аппроксимации входящих в исходные дифференциальные уравнения производных их дискретными (разностными) аналогами. К достоинствам МКР относятся высокая эффективность и простота реализации, наглядность процедуры дискретизации, которая дает возможность построения схем высокого порядка точности. Однако эти достоинства реализуются лишь при использовании достаточно «хорошей» регулярной (структурированной) сетки – почти ортогональной и с плавно меняющимися размерами ячеек. Поэтому большинство приложений МКР ограничено случаями сравнительно простых по геометрии расчетных областей. К недостаткам МКР относятся медленную сходимость (из-за использования аппроксимирующего полинома низкой степени) и невысокую точность (по сравнению с другими методами).

Метод конечных элементов (МКЭ) освещен в работах [2, 15, 33, 42, 47, 96, 101, 106, 107, 119, 126]. Основная идея МКЭ состоит в минимизации функционала энергии. Решение краевой задачи сводится к решению системы линейных или нелинейных (в зависимости от выбранного типа задачи) алгебраических уравнений. Другими словами, непрерывная функция аппроксимируется дискретной моделью, которая является совокупностью конечного числа кусочно-непрерывных функций, каждая из которых определена на своей некоторой подобласти, называемой элементом. В качестве кусочно-непрерывной функции в пределах элемента чаще всего принимают полином.

Главными преимуществами МКЭ являются универсальный подход к конструкциям любой сложности и адаптированность к использованию на электронно-вычислительных машинах. К недостаткам рассматриваемого метода следует отнести его трудоемкость и сложность применения МКЭ к расчету оболочек, имеющих отверстия, трещины, зоны разрыва граничных условий, а также зоны резкого увеличения напряжений, связанные с наличием краевого эффекта.

Метод конечных объемов (МКО) широко освещен в работах [22, 53, 54, 112, 146, 148, 150, 159, 162, 161]. В МКО подобно МКЭ происходит разбиение области на некоторое число подобластей, которые можно считать достаточно большими конечными элементами. Затем аналогично МКР в каждом получившемся конечном объеме вводится разностная сетка и система уравнений заменяется каким-либо ее разностным аналогом.

К преимуществам МКО относят локальную консервативность дискретных схем, большую простоту и наглядность, а также возможность естественного учета граничных условий второго рода. К недостаткам рассматриваемого метода следует отнести следующее: использование неструктурированных сеток является довольно сложным в алгоритмическом отношении, трудоемким при реализации и ресурсоемким при проведении расчетов, в особенности при решении трехмерных задач; не обладает устоявшимися технологиями учета кусочно-полиномиального поведения решения, источниковых членов и коэффициентов переноса.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) рассмотрен в работах [29, 78, 94, 103, 117, 118, 130, 147] как метод дискретизации дифференциальных уравнений, учитывающий мелкомасштабные (относительно шага сетки) неоднородности задачи. Базисные функции строятся для рассматриваемой задачи специальным образом, так чтобы в них самих содержалась значительная информация о решении задачи. Именно специальный, под задачу, выбор базисных функций позволяет с помощью очень грубого разбиения исходной области получить хорошее численное решение. На практике всегда имеют место случаи, когда ресурсов компьютера недостаточно, особенно при решении задач в трехмерной постановке. Узким

местом при этом является этап решения больших систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), возникающих в результате конечно элементной аппроксимации.

В основе изометрического метода численного решения ДУ [51, 142, 160, 168] лежит концепция о том, что один и тот же набор функций используется для создания геометрии тела и аппроксимации решения на конечных элементах. При этом зачастую используются не непрерывные функции, а кусочно-полиномиальные, что усложняет анализ полученных результатов.

1.3 Основы геометрической теории многомерной интерполяции

Термин «Геометрический интерполянт» впервые упоминается в работе [64]. Вместе с тем его геометрический смысл и примеры эффективного использования были получены в более ранних работах, например, в [65]. Под геометрическим интерполянтом в общем случае понимается геометрический объект многомерного аффинного пространства, проходящий через наперед заданные точки, координаты которых соответствуют исходной экспериментально-статистической информации. Для координации геометрического интерполянта в пространстве используется декартовая система координат. Хотя все полученные зависимости справедливы и для аффинной системы координат, декартовая система координат используется как наиболее известная и получившая в математике и в инженерной практике наибольшее распространение.

Любой исследуемый многофакторный процесс (или явление) представляет взаимодействие функции отклика и факторов, влияющих на нее и потому получивших название факторы влияния. При этом задача моделирования многофакторного процесса сводится к установлению функциональной зависимости между функцией отклика и факторами влияния. Для определения такой зависимости в декартовой системе координат каждой отдельной оси ставится в соответствие свой отдельный фактор и непосредственно функция отклика. Таким

образом, за счет функции отклика количество осей декартовой системы координат всегда на одну больше, чем факторов.

Для аналитического описания геометрических интерполянтов в декартовой системе координат используется математический аппарат «Точечное исчисление» [13], основанный на инвариантах аффинной геометрии. Результатом такого описания является точечное уравнение или вычислительный алгоритм, который представляет собой упорядоченную последовательность точечных уравнений. Точечные уравнения по своей сути являются символьной записью с использованием точек и параметров. Параметры позволяют установить взаимосвязь между факторами влияния и функцией отклика. Геометрической интерпретацией такого взаимодействия является процесс проецирования моделируемого геометрического объекта на оси декартовой системы координат.

Рассмотрим в качестве примера, покоординатный расчет отрезка прямой в 3-мерном пространстве, как одного из наиболее простых геометрических объектов:

$$M = (B - A)t + A \leftrightarrow \begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A, \\ y = (y_B - y_A)t + y_A, \\ z = (z_B - z_A)t + z_A. \end{cases}$$

С помощью параметра t описываются факторы x и y , влияющие на функцию отклика z . Геометрическая интерпретация такого взаимодействия представлена на рисунке 1.1.

Таким образом, параметр точечного уравнения, как это принято в математике, представляется вспомогательной переменной, не входящей в изначальное условие задачи, но удобной для ее решения. Для обеспечения возможности обобщения на многомерное пространство, параметр точечного уравнения должен обладать инвариантными свойствами по отношению к размерности декартовой системы координат. Чаще всего это простое отношение трех точек прямой, пример использования которого представлен выше.

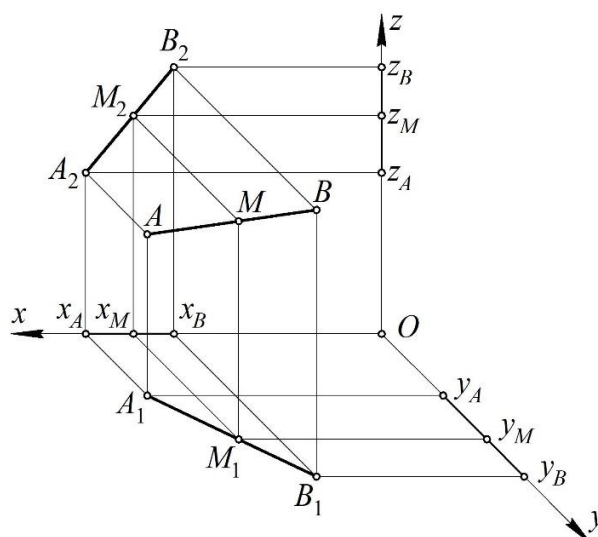


Рисунок 1.1 – Геометрическая интерпретация взаимосвязи факторов влияния, функции отклика и параметров точечных уравнений

Аналогичным образом любое точечное уравнение можно представить в виде совокупности проекций на оси декартовой системы координат, аналитическим эквивалентом которой является система параметрических уравнений.

Для моделирования многофакторных процессов и явлений с помощью геометрического интерполянта достаточно разработать геометрическую схему графического построения геометрического интерполянта и аналитически описать ее с помощью математического аппарата точечного исчисления. Процесс построения геометрической схемы является задачей индивидуальной и напрямую определяется исходными данными для моделирования. Тем не менее можно выделить два концептуальных принципа формирования таких геометрических схем, которые получили название дерева геометрической модели [65].

1 принцип. От простого к сложному. Любой, даже самый сложный геометрический интерполянт можно представить в виде совокупности более простых интерполянтов, объединенных между собой с помощью образующей линии. Например, геометрический интерполянт 2-мерного пространства, который представляет собой отсек поверхности отклика, можно представить в виде совокупности 1-мерных геометрических интерполянтов (опорных линий, проходящих через наперед заданные точки), объединенных друг с другом с

помощью образующей линии. Таким образом формируется дерево модели геометрического интерполянта, которое по своей сути является геометрической схемой его построения. И чем более многофакторный процесс моделируется, тем сложнее структура дерева геометрической модели и соответственно вычислительный алгоритм его построения. При этом все равно он состоит из более простых, но взаимосвязанных между собой элементов.

2 принцип. Принадлежность одного геометрического объекта другому. В основу моделирования многофакторных процессов и явлений с помощью геометрических интерполянтов положен простейший принцип принадлежности одного геометрического объекта к другому из начертательной геометрии. Например, прямая линия принадлежит плоскости, если две точки этой прямой принадлежат плоскости. В свою очередь, точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Рассматривая прямую линию, как частный случай кривой, а плоскость – как частный случай поверхности, получим, что для принадлежности исходных точек поверхности, необходимо организовать их в виде опорных (в начертательной геометрии используется термин направляющих) линий, которые следует объединить впоследствии с помощью образующей. Тогда все точки, принадлежащие опорным линиям, будут принадлежать искомой поверхности, которая, в свою очередь, принадлежит 3-мерному пространству. Причем, образующая также является кривой линией, только проходящей через текущие точки опорных линий искомой поверхности. Обобщая этот подход на многомерное пространство, получим следующее утверждение.

Для того чтобы n -параметрический геометрический интерполянт в виде гиперповерхности $(n+1)$ -мерного аффинного пространства был носителем наперёд заданных точек, координаты которых соответствуют исходной экспериментально-статистической информации, необходимо чтобы исходные её точки принадлежали семейству гиперповерхностей n -мерного пространства, объединенных в гиперповерхность $(n+1)$ -мерного пространства образующей

линией, проходящей через текущие точки семейства гиперповерхностей n -мерного пространства.

Так для одномерного геометрического интерполянта (1-параметрического интерполянта) дерево геометрической модели представляет собой всего одну линию (Рисунок 1.2), проходящую через наперед заданные точки.

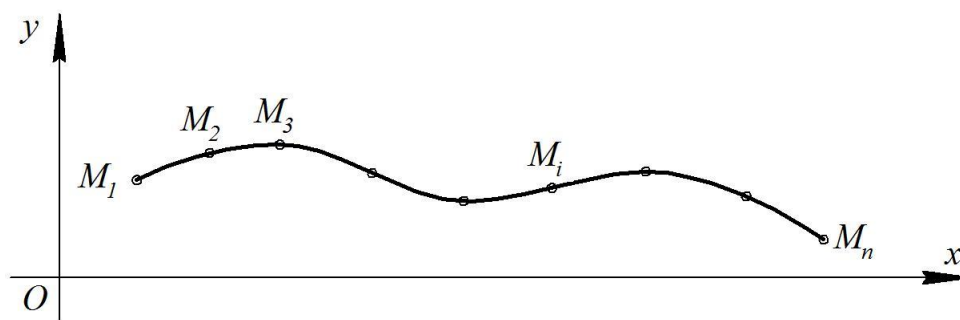


Рисунок 1.2 – 1-параметрический геометрический интерполянт

В точечном исчислении [64, 65, 164] такой интерполянт можно представить в виде следующего точечного уравнения однопараметрического множества точек:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i p_i(u) \quad (1.2)$$

где M – текущая точка дуги кривой линии, проходящей через наперед заданные точки;

M_i – исходные точки, через которые должна проходить дуга кривой;

$p_i(u)$ – функции от параметра u ;

u – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

n – количество исходных точек дуги кривой линии;

i – порядковый номер исходной точки.

При этом обязательным является условие принадлежности однопараметрического множества пространству выбранной размерности:

$$\sum_{i=1}^n p_i(u) = 1.$$

Выполнение этого условия обеспечивается использованием специальных алгебраических кривых, полученных на основе полинома Бернштейна [13].

Выполнение этого условия является обязательным для всех последующих интерполянтов и далее не приводится, поскольку оно вычисляются аналогичным образом.

Точечное уравнение (1.2) представляет собой символьную запись. Выполнив по координатный расчет для двумерного пространства, получим систему однотипных параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_M = \sum_{i=1}^n x_{M_i} p_i(u); \\ y_M = \sum_{i=1}^n y_{M_i} p_i(u). \end{cases}$$

Аналогичным образом любое точечное уравнение для пространства любой размерности можно представить в виде системы параметрических уравнений. Причем представленная система параметрических уравнений представляет собой аналитическое описание проекций дуги плоской кривой на оси глобальной системы координат.

Двумерный геометрический интерполянт представляет двухпараметрическое множество точек – поверхность 3-мерного пространства, проходящую через наперед заданные точки (Рисунок 1.3).

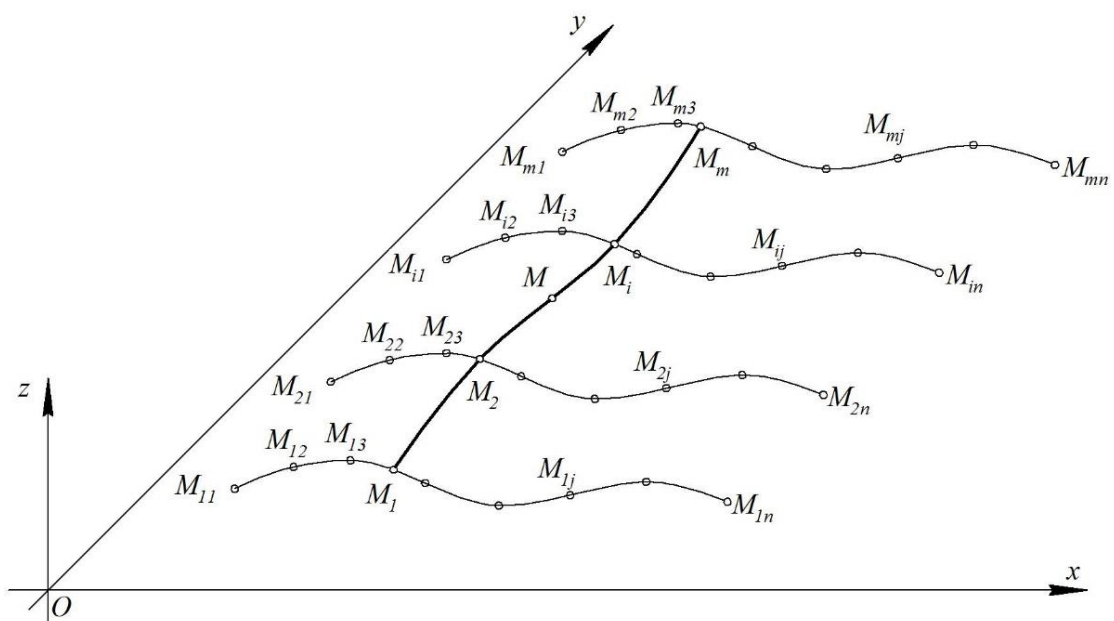


Рисунок 1.3 – 2-параметрический геометрический интерполянт

Вычислительный алгоритм определения 2-параметрического геометрического интерполянта можно представить в виде следующей последовательности точечных уравнений, которые включают m 1-параметрических интерполянтов на стадии формирования дерева геометрической модели (Рисунок 1.3):

$$\left[\begin{array}{l} M_1 = \sum_{j=1}^n M_{1j} p_{1j}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} p_{ij}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_m = \sum_{j=1}^n M_{mj} p_{mj}(u); \\ M = \sum_{i=1}^m M_i q_i(v), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

где $q_i(v)$ – функции от параметра v .

Для описания 2-параметрического интерполянта (Рисунок 1.3) используется 3-мерная декартова система координат (хотя предложенные уравнения справедливы и для аффинной системы координат). Кроме того, такой геометрический интерполянт может существовать в пространстве более высоких размерностей. При этом точечное уравнение останется неизменным, но при выполнении по координатного расчета параметрических уравнений системы будет больше, и их количество будет напрямую зависеть от размерности пространства, в котором находится моделируемый геометрический объект.

Аналогичным образом, трехпараметрический интерполянт определяется 3-параметрическим множеством точек – гиперповерхностью 4-мерного пространства, проходящей через наперед заданные точки (Рисунок 1.4).

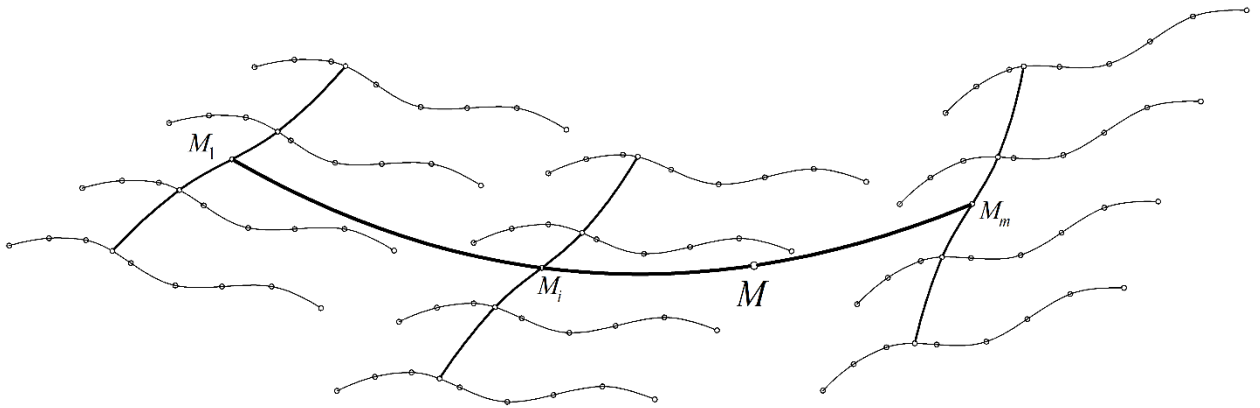


Рисунок 1.4 – 3-параметрический геометрический интерполянт

Вычислительный алгоритм определения 3-параметрического интерполянта будет включать в себя m 2-параметрических интерполянтов, формирующих еще более расширенное дерево геометрической модели (Рисунок 1.4):

$$\left[\begin{array}{l} M_{ij} = \sum_{k=1}^l M_{ijk} p_{ijk}(u) \\ \dots \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} q_{ij}(v) \\ \dots \\ M = \sum_{i=1}^m M_i r_i(w) \end{array} \right. ,$$

где M – текущая точка отсека гиперповерхности, проходящей через наперед заданные точки в количестве $m \times n \times l$;

M_i – текущая точка образующей i -го отсека поверхности, проходящая через наперед заданные точки, которая является опорной для построения гиперповерхности;

M_{ij} – текущая точка j -й опорной дуги кривой, проходящей через наперед заданные точки;

M_{ijk} – исходные точки, через которые должен проходить искомый отсек гиперповерхности; координаты этих точек соответствуют исходным экспериментально-статистическим данным;

$p_{ijk}(u)$ – функции от параметра u , определяющие вид опорных линий;

$q_{ij}(v)$ – функции от параметра v , определяющие вид образующих линий отсеков поверхностей;

$r_i(w)$ – функции от параметра w , определяющие вид образующей линии отсека гиперповерхности;

l – количество исходных точек в каждой опорной линии;

n – количество опорных линий для построения опорных поверхностей;

m – количество опорных поверхностей для построения гиперповерхности;

i – порядковый номер опорной поверхности;

j – порядковый номер опорной линии;

k – порядковый номер исходной точки в каждой опорной линии;

u , v и w – текущие параметры, которые изменяются от 0 до 1.

Выполнив по координатный расчет, получим проекции гиперповерхности на оси глобальной системы координат, для которой оси Ox , Oy и Oz будут соответствовать факторам влияния, а Ot – искомой функции отклика.

Тогда задача сводится к определению кривых линий, проходящих через наперед заданные точки, только таких линий становится больше. Таким образом, формируется дерево модели процесса, которое можно представить в виде некоторой геометрической схемы, по которой впоследствии будет построен и аналитически описан геометрический объект. Аналогичным образом можно построить геометрическую модель процесса, принадлежащую пространству любой размерности.

Следует отметить, что сама геометрическая теория многомерной интерполяции была разработана и эффективно используется для моделирования и оптимизации многофакторных процессов и явлений на основе любой экспериментально-статистической информации [61, 66, 68]. Однако в контексте приведенных исследований она используется по другому назначению, а именно, для численного решения ДУ.

1.4 Выводы по разделу 1

1. Выполнен анализ существующих подходов к моделированию тонкостенных оболочек инженерных сооружений, который подтвердил актуальность выбранной темы и необходимость проведения исследований по усовершенствованию существующих методов их математического и компьютерного моделирования.

2. Выполнена систематизация дифференциальных уравнений по способу их решения, что дает возможность исследовать достоинства и недостатки существующих методов решения ДУ. В результате установлено, что основным недостатком численного решения дифференциальных уравнений, которые используются для моделирования напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений является большая их продолжительность по времени. Поэтому разработка более эффективных методов численного решения ДУ является актуальной научной задачей, которая имеет широкие перспективы практического использования во многих отраслях науки и техники.

3. В качестве основного метода решения поставленных в работе задач выбрана геометрическая теория многомерной интерполяции, которая позволяет определять геометрические объекты многомерного пространства с заданными дифференциальными характеристиками в узловых точках интерполяции.

РАЗДЕЛ 2

ОБЩИЙ ПОДХОД К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯНТОВ

Метод численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов можно отнести к категории методов конечных суперэлементов, применяемых для решения широкого круга инженерных и прикладных задач. Особенностью предложенного метода является то, что в качестве аппроксимирующей функции используется геометрический интерполянт – геометрический объект, проходящий через наперед заданные точки – узлы интерполяции. Таким образом многомерный геометрический интерполянт представляет собой суперэлемент, включающий информацию как о геометрических, так и о физических параметрах его состояния. Только в данном случае узлы интерполяции заранее неизвестны. Они вычисляются из условия соответствия исходному ДУ. Соответствие промежуточных точек исходному ДУ обеспечивается за счет интерполяции. Таким образом, чем больше узлов интерполяции, тем ближе геометрический интерполянт к искомому численному решению ДУ. Такой подход по аналогии с изогометрическим методом [145], предложенным Томом Хьюзом, позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами.

2.1 Теоретические основы численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов

Традиционно одним из возможных результатов численного решения ДУ является некоторая геометрическая модель, визуализация которой позволяет наглядно оценить полученный результат. Таким образом, для большинства абстрактных решений существует геометрическая интерпретация. Например, решением обыкновенного ДУ будет некоторая линия, а решением неоднородного уравнения теплопроводности стержня – отсек поверхности, т.е. результатом

решения ДУ является некоторый геометрический объект. Изменим причинно-следственную связь на обратную. Тогда получится, что для решения ДУ необходимо смоделировать некоторый геометрический объект, обладающий требуемыми дифференциальными характеристиками. Подобный подход был реализован в работах [62, 63]. Конечно, ДУ обладают широким разнообразием разновидностей, и далеко не для каждого ДУ существует точное решение. Поэтому для численного решения ДУ достаточно, чтобы требуемые дифференциальные характеристики были обеспечены в некоторых дискретных точках (узлах сети), принадлежащих моделируемому геометрическому объекту. При этом промежуточные значения полученного решения будут определяться с помощью многомерной интерполяции. Тогда для аппроксимации решения ДУ удобно сразу использовать один из геометрических интерполянтов.

2.1.1 Модификация полиномов Бернштейна для аналитического описания геометрических интерполянтов

Алгебраические кривые, проходящие через наперед заданные точки, полученные на основе полиномов Бернштейна, являются достаточно простым и гибким инструментом многомерной интерполяции и аппроксимации. Необходимость определения таких кривых заключается в том, что при моделировании многофакторных процессов для каждой отдельной задачи приходится решать СЛАУ при определении искомого уравнения. Чтобы получить универсальный подход к моделированию многофакторных процессов необходимо получить такие уравнения дуг алгебраических кривых, в которые можно подставлять любые значения координат точек и сразу получать нужный результат. Для этого необходимо процесс решения СЛАУ использовать непосредственно на стадии моделирования кривых.

В работе [138] во время исследований геометрических свойств алгебраических кривых был предложен способ определения дуг кривых 3-го и 4-го порядка, проходящих соответственно через 4 и 5 наперед заданных точек.

Дальнейшее развитие этот метод получил в работах [20, 137]. Обобщение этого метода для моделирования кривой n -го порядка, которая проходит через $n + 1$ наперед заданных точек, на основе полиномов Бернштейна, было выполнено в работе [63].

Рассмотрим обобщение предложенного способа в единый метод моделирования дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, на основе полиномов Бернштейна. Пусть задана ломаная линия $A_1A_2 \dots A_n, A_{n+1}$. Тогда дуга кривой n -го порядка имеет следующее точечное уравнение:

$$\begin{aligned} M &= A_1 \bar{t}^n + A_2 C_n^1 \bar{t}^{n-1} t + A_3 C_n^2 \bar{t}^{n-2} t^2 + \dots + A_n C_n^{n-1} \bar{t} t^{n-1} + A_{n+1} t^n = \\ &= \sum_{i=0}^n A_{i+1} C_n^i \bar{t}^{n-i} t^i \end{aligned} \quad (2.1)$$

где M – текущая точка дуги кривой;

A_n^1, \dots, A_n^i – исходные точки, определяющие форму дуги кривой;

C_n^1, \dots, C_n^i – коэффициенты Бернштейна;

t – текущий параметр;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра до 1.

Тогда исходное точечное уравнение кривых, полученных на основе полиномов Бернштейна, которые в общем случае находятся в пространстве размерности n и являются кривыми $(n - 1)$ -й кривизны, могут быть записаны в следующем виде:

$$M = \sum_{i=0}^n A_{i+1} \frac{n!}{i! (n-i)!} \bar{t}^{n-i} t^i. \quad (2.2)$$

Используя равномерное распределение текущего параметра $t = \frac{j}{n}$, получим:

$$M_{j+1} = \sum_{i=0}^n A_{i+1} \frac{n!}{i! (n-i)!} \left(\frac{n-j}{n}\right)^{n-i} \left(\frac{j}{n}\right)^i. \quad (2.3)$$

Переопределим точки ломаной линии $A_1A_2 \dots A_n, A_{n+1}$ через точки $M_1M_2 \dots M_n, M_{n+1}$, которые принадлежат дуге кривой, определенной с помощью уравнения (2.3), пропорционально изменяя значение параметра t от 0 до 1. В

результате получим систему линейных $n + 1$ алгебраических уравнений, каждая строка которой определяется следующим уравнением:

$$\sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} (n-j)^{n-i} (j)^i A_{i+1} = n^n M_{j+1}. \quad (2.4)$$

Решив эту систему уравнений методом Крамера и подставив в исходное уравнение (2.2), получим уравнение дуги кривой, проходящей через наперед заданные точки $M_1 M_2 \dots M_n, M_{n+1}$.

Полученная дуга кривой представлена в точечной форме, т.е. в символьной форме, для которой вместо координат используются непосредственно точки. Для практического использования полученных уравнений необходимо выполнить покоординатный расчет [12]. При этом одно точечное уравнение заменяется системой параметрических уравнений, которые представляют собой аналитическое описание проекций текущей точки на оси глобальной системы координат. Здесь следует отметить очень важную отличительную особенность полученного уравнения. Для точечных уравнений принадлежность геометрического объекта к пространству конкретной размерности определяется суммой функций от параметра t , которая обязательно должна быть равна 1. Поскольку функции от параметра t определяются биномом Ньютона, который раскладывается для параметра t и его дополнения до 1, то условие принадлежности дуги кривой конкретному пространству будет выполняться вне зависимости от размерности пространства. Иными словами, полученные параметрические уравнения дуги кривой могут быть использованы для пространства любой размерности.

Другим важным свойством полученной дуги кривой является равномерное распределение параметра, изначально заложенное в метод определения дуги кривой, проходящей через наперед заданные точки. При этом для каждой конкретной координатной оси, имеющей равномерное распределение координат исходных точек, справедлива линейная зависимость между натуральным значением фактора, принадлежащего i -й оси проекций и текущим параметром:

$$x_i = nl_i t + b_i, \quad (2.5)$$

где x_i – i -я ось проекций глобальной системы координат;

n – порядок дуги кривой;

b_i – начальное значение фактора влияния, соответствующее i -й оси проекций;

l_i – шаг равномерного распределения проекции исходных точек на i -ю ось.

Это свойство алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, в значительной мере сокращает объем необходимых вычислений при моделировании многопараметрических геометрических объектов, позволяя рассматривать их на регулярной сети точек. Сама методика при этом носит универсальный характер и без внесения каких-либо изменений, может в полном объеме использоваться как для регулярной, так и для нерегулярной сети точек.

Листинг базовой программы определения точечных уравнений дуг алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, последовательность которых определяет многомерные геометрические интерполянты, приведен в приложении Б.

2.1.2 Классификация численных решений ДУ в зависимости от размерности лапласиана

Как уже было отмечено, под геометрическим интерполянтом понимают параметризованный геометрический объект, проходящий через наперед заданные точки. Координаты этих точек соответствуют исходной экспериментально-статистической информации или обладают необходимыми наперед заданными свойствами.

Для решения уравнений математической физики [135, 134] выбор геометрического интерполянта зависит в первую очередь от размерности пространства лапласиана.

В классической литературе [9, 100] оператор Лапласа – дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и

обозначаемый символом Δ . В n -мерном пространстве этот оператор функции U ставит в соответствие функцию $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)U$.

Трехмерным оператором Лапласа называют выражение:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

где U – функция трех переменных x, y, z . Если функция U зависит только от двух переменных, то оператор Лапласа:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

называют двумерным.

Без нарушения общности, будем называть одномерным оператором Лапласа вторую производную функции $\frac{d^2 U}{dx^2}$, если функция U зависит только от одной переменной x , и лапласианом нулевого порядка (или размерности 0) первую производную $\frac{dU}{dx}$.

В зависимости от размерности лапласиана для аппроксимации решения ДУ выбирают соответствующий тип интерполянта, который описывает аппроксимирующий геометрический объект. В результате получена классификация численных решений ДУ с помощью геометрических интерполянтов в зависимости от размерности лапласиана (Таблица 2.1).

Таблица 2.1 – Классификация решений ДУ в зависимости от размерности лапласиана

Размерность лапласиана	Тип геометрического интерполянта	Вид аппроксимирующего геометрического объекта
0	1-параметрический $U = f(x)$	кривая в R^2
1	2-параметрический $U = f(x, t)$	поверхность в R^3
2	3-параметрический $U = f(x, y, t)$	гиперповерхность в R^4
3	4-параметрический $U = f(x, y, z, t)$	гиперповерхность в R^5
...
n	$(n + 1)$ -параметрический $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$	гиперповерхность в R^{n+2}

2.1.2 Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью 1-параметрических геометрических интерполянтов

Рассмотрим уравнение вида

$$F\left(x, U, \frac{dU}{dx}\right) = 0. \quad (2.6)$$

В данном уравнении размерность лапласиана равна 0. Следовательно, для аппроксимации решения выбираем 1-параметрический интерполянт.

В соответствии с геометрической теорией многомерной интерполяции [59, 60], геометрический интерполянт формируем путем аналитического описания дерева геометрической модели. Для 1-параметрического интерполянта дерево геометрической модели представляет собой линию, проходящую через наперед заданные точки.

В точечном исчислении [12, 14] такой интерполянт можно представить в виде следующего точечного уравнения 1-параметрического множества точек:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i p_i(u),$$

где M – текущая точка дуги кривой линии, проходящей через наперед заданные точки;

M_i – исходные точки, через которые должна проходить дуга кривой;

$p_i(u)$ – функции параметра u ;

u – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

n – количество исходных точек дуги кривой линии;

i – порядковый номер исходной точки.

Обязательным является условие принадлежности однопараметрического множества пространству выбранной размерности:

$$\sum_{i=1}^n p_i(u) = 1.$$

Выполнение этого условия обеспечивается использованием специальных алгебраических кривых, полученных на основе полинома Бернштейна [17], и является обязательным для всех последующих интерполянтов.

Выполнив покоординатный расчет для двумерного пространства, получим систему однотипных параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i p_i(u); \\ U = \sum_{i=1}^n U_i p_i(u). \end{cases} \quad (2.7)$$

Изначально в метод определения дуги кривой, проходящей через наперед заданные точки [63], заложено равномерное распределение параметра. С учетом этого справедлива линейная зависимость между значением x и текущим параметром:

$$x = \tilde{n}lu + b, \quad (2.8)$$

где \tilde{n} – порядок дуги кривой;

l – шаг равномерного распределения точек;

b – начальное значение x .

В результате зависимость (2.7) принимает вид

$$\begin{cases} x = au + b; \\ U = \sum_{i=1}^n U_i p_i(u), \end{cases} \quad (2.9)$$

где $a = \tilde{n}l$.

Далее, учитывая линейную зависимость первого уравнения системы (2.9), перейдем к уравнению, заданному в явном виде: $U = f(x)$. Продифференцируем его в соответствии с уравнением (2.6). Подставим поочередно значения параметров в узловые точки интерполянта и составим СЛАУ, решив которую получим искомое численное решение уравнения (2.6).

2.1.3. Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 2-параметрических геометрических интерполянтов

Рассмотрим использование предложенного метода для решения уравнений вида

$$F\left(x, U, \frac{dU}{dx}, \frac{d^2U}{dx^2}\right) = 0. \quad (2.10)$$

Для аппроксимации решения уравнения (2.10) воспользуемся 2-параметрическим геометрическим интерполянтном, т.к. в уравнении присутствует одномерный лапласиан $\frac{d^2U}{dx^2}$.

Двумерный геометрический интерполянт определяется 2-параметрическим множеством точек – поверхностью в R^3 , проходящей через наперед заданные точки.

Вычислительный алгоритм определения 2-параметрического геометрического интерполянта можно представить в виде следующей последовательности точечных уравнений, которые включают m 1-параметрических интерполянтов на стадии формирования дерева геометрической модели:

$$\left[\begin{array}{l} M_1 = \sum_{j=1}^n M_{1j} p_{1j}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} p_{ij}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_m = \sum_{j=1}^n M_{mj} p_{mj}(u); \\ M = \sum_{i=1}^m M_i q_i(v), \end{array} \right. \quad (2.11)$$

где $p_{ij}(u)$ – функции параметра u ;

$q_i(v)$ – функции параметра v .

Выполним покоординатный расчет последовательности уравнений (2.11) для 3-мерного пространства. Для этого примем декартовую систему координат с осями x , t и U . Таким образом, количество уравнений последовательности (2.11)

утроится. С учетом особых свойств дуг описанных алгебраических кривых, полученных на основе полиномов Бернштейна, получим

$$\begin{cases} t = a_t u + b_t; \\ x = a_x v + b_x; \\ U = \sum_{i=1}^m U_i q_i(v), \end{cases} \quad (2.12)$$

где $U_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} p_{ij}(u)$;

a_t, a_x, b_t, b_x – параметры, которые определяются по аналогии с (2.8).

Используя линейную зависимость первых двух уравнений системы (2.12), перейдем к уравнению, заданному в явном виде: $U = f(x, t)$. Продифференцируем его в соответствии с уравнением (2.10). Подставляя поочередно значения параметров в узловые точки интерполянта, составим СЛАУ, решив которую, получим искомое численное решение уравнения (2.10).

2.1.4 Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 3-параметрических геометрических интерполянтов

Рассмотрим уравнение вида

$$F\left(x, y, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right) = 0. \quad (2.13)$$

В качестве геометрического интерполянта выберем 3-параметрическое множество точек – гиперповерхность 4-мерного пространства, проходящую через наперед заданные точки.

Вычислительный алгоритм определения 3-параметрического интерполянта включает m 2-параметрических интерполянтов, формирующих дерево геометрической модели:

$$\left[\begin{array}{l} M_{ij} = \sum_{k=1}^l M_{ijk} p_{ijk}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} q_{ij}(v); \\ \dots\dots\dots \\ M = \sum_{i=1}^m M_i r_i(w), \end{array} \right. \quad (2.14)$$

где $p_{ijk}(u)$ – функции параметра u ;

$q_{ij}(v)$ – функции параметра v ;

$r_i(w)$ – функции параметра w .

Выполним покоординатный расчет последовательности уравнений (2.14) для 4-мерного пространства. Для этого примем декартовую систему координат с осями x , y , t и U . С учетом особых свойств дуг алгебраических кривых, полученных на основе полиномов Бернштейна, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = a_t u + b_t; \\ x = a_x v + b_x; \\ y = a_y w + b_y; \\ U = \sum_{i=1}^m U_i r_i(w), \end{array} \right. \quad (2.15)$$

где $U_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} q_{ij}(v)$, $U_{ij} = \sum_{k=1}^l U_{ijk} p_{ijk}(u)$,

$a_t, a_x, a_y, b_t, b_x, b_y$ – параметры, определяемые по аналогии с (2.8).

Поскольку первые три уравнения системы (2.15) линейно зависят от параметров, перейдем к уравнению, заданному в явном виде $U = f(x, y, t)$. Продифференцируем его в соответствии с уравнением (2.13). Подставляя поочередно значения параметров в узловые точки интерполянта, составим СЛАУ, решив которую получим искомое численное решение уравнения (2.13).

2.1.5 Численное решение дифференциальных уравнений с помощью 4-параметрических геометрических интерполянтов

Рассмотрим уравнение второго порядка с тремя независимыми переменными, заданное в неявном виде:

$$F\left(x, y, z, U, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = 0. \quad (2.16)$$

Для аппроксимации решения представленного уравнения выберем 4-параметрический интерполянт – гиперповерхность, принадлежащую 5-мерному пространству.

Вычислительный алгоритм определения 4-параметрического интерполянта включает m 3-параметрических интерполянтов, которые формируют дерево геометрической модели:

$$\left[\begin{array}{l} M_{ijk} = \sum_{\sigma=1}^{\tau} M_{ijk\sigma} p_{ijk\sigma}(u); \\ \dots\dots\dots \\ M_{ij} = \sum_{k=1}^l M_{ijk} q_{ijk}(v); \\ \dots\dots\dots \\ M_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} r_{ij}(w); \\ \dots\dots\dots \\ M = \sum_{i=1}^m M_i s_i(\varphi), \end{array} \right. \quad (2.17)$$

где $p_{ijk\sigma}(u)$ – функции параметра u ;

$q_{ijk}(v)$ – функции параметра v ;

$r_{ij}(w)$ – функции параметра w ;

$s_i(\varphi)$ – функции параметра φ .

Выполним покоординатный расчет последовательности уравнений (2.17) для 5-мерного пространства. Для этого примем декартовую систему координат с осями

x, y, z, t и U . С учетом особых свойств дуг алгебраических кривых, полученных на основе полиномов Бернштейна [63], находим

$$\begin{cases} t = a_t u + b_t; \\ x = a_x v + b_x; \\ y = a_y w + b_y; \\ z = a_z \varphi + b_z; \\ U = \sum_{i=1}^m U_i s_i(\varphi), \end{cases} \quad (2.18)$$

где $U_i = \sum_{j=1}^n U_{ij} r_{ij}(w)$, $U_{ij} = \sum_{k=1}^n U_{ijk} q_{ijk}(v)$, $U_{ijk} = \sum_{\sigma=1}^l U_{ijk\sigma} p_{ijk\sigma}(u)$;

$a_t, a_x, a_y, a_z, b_t, b_x, b_y, b_z$ – параметры, определяемые по аналогии с (2.8).

Поскольку первые четыре уравнения системы (2.18) линейно зависят от параметров, перейдем к уравнению, заданному в явном виде $U = f(x, y, z, t)$. Продифференцируем его в соответствии с уравнением (2.16). Подставляя поочередно значения параметров в узловые точки интерполянта, составим СЛАУ, решив которую получим искомое численное решение уравнения (2.16).

2.2 Базовый вычислительный алгоритм решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов

Основная идея предложенного метода аппроксимации заключается в том, что в узлах выбранной интерполяционной сети точек выполняется условие исходного ДУ. Для ее реализации был сформирован следующий базовый вычислительный алгоритм (Рисунок 2.1).

Конечно, каждая инженерная задача носит отдельный характер и обладает своими особенностями, но на базовый подход к решению ДУ это не повлияет. Например, при большом количестве узловых точек, возможно использование составных аппроксимирующих кривых, которые будут формировать составные геометрические объекты многомерного пространства. При необходимости их

можно стыковать с требуемым порядком гладкости [66]. А при увеличении порядка ДУ, необходимо увеличение порядка аппроксимирующей кривой. Причем для получения корректного результата решения ДУ необходимо чтобы порядок аппроксимирующей кривой был больше, чем порядок исходного ДУ.

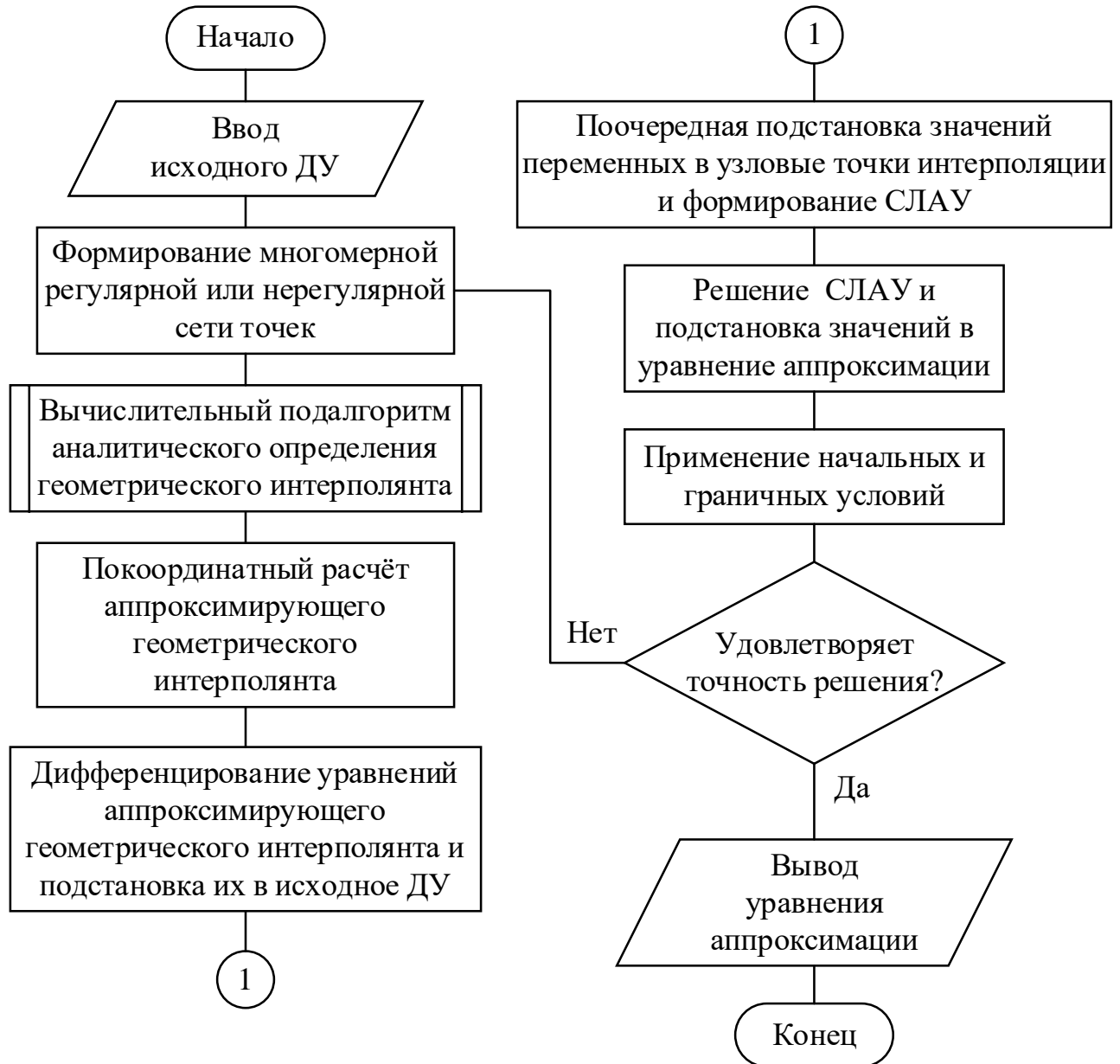


Рисунок 2.1 – Блок-схема базового вычислительного алгоритма численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов

Следует отметить, что результатом выполнения предложенного вычислительного алгоритма будет общее решение ДУ, которое может иметь бесконечное множество частных решений. Конкретное решение выделяется из

множества частных решений с помощью начальных и граничных условий, которые в отличие от большинства методов решения ДУ, необходимо заложить в виде исходных данных на стадии создания и аналитического описания геометрического интерполянта, формируя тем самым пункт 4 вычислительного алгоритма. Другими словами, геометрическим отображением начальных и граничных условий также являются некоторые геометрические объекты: точки, линии, поверхности и т.п. Таким образом, искомый геометрический интерполянт должен быть носителем геометрических объектов, соответствующих начальным и граничным условиям.

2.3 Особенности численного решения дифференциальных уравнений на нерегулярных сетях

Использование точечных уравнений аналитического описания геометрического интерполянта, приводит к необходимости выполнения по координатному расчету для перехода от точечных уравнений к параметрическим. Особые свойства геометрических интерполянтов при численном решении ДУ на регулярной сети точек позволяют легко перейти от системы параметрических уравнений к уравнению в явном виде за счет линейной зависимости между переменными и параметрами. Вместе с тем существует возможность численного решения и на нерегулярной сети точек, но при этом добавляется дополнительный этап – решение системы дифференциальных уравнений методом Крамера.

2.3.1 По координатный расчет для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью 1-параметрических геометрических интерполянтов

В классической литературе дифференциальные уравнения в частных производных представляются в явном виде, реже в неявном виде, как было показано выше. Для построения функций отклика в точечном исчислении, используются геометрические объекты, проходящие через наперед заданные

точки, в виде точечных уравнений и вычислительных алгоритмов, которые по своей сути являются символьной записью. Для перехода от точечных уравнений к параметрическим необходимо выполнить по координатный расчет. Здесь возникает отдельная задача, как продифференцировать функцию отклика по переменным, если она задана параметрически? Для дуги кривой, как 1-параметрического множества, эта задача не представляет сложности и хорошо известна из курса дифференциального исчисления:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ или } \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}}.$$

Вместе с тем, необходимо получить решение этой задачи с учётом обобщения на многомерное пространство для использования многомерных геометрических интерполянтов как на регулярных, так и на нерегулярных сетях точек.

2.3.2 Покоординатный расчет для решения дифференциальных уравнений с помощью 2-параметрических геометрических интерполянтов

Предположим, задан отсек поверхности отклика в трехмерном аффинном пространстве системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = f_1(u, v), \\ y = f_2(u, v), \\ z = f_3(u, v). \end{cases}$$

Необходимо определить частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Принципиальный подход к решению поставленной задачи представлен в работе [111] и сводится к решению однородной системы двух дифференциальных уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial y}. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ воспользуемся методом Крамера. Таким

образом, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

Обозначив

$$a = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}}, \quad b = -\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}}, \quad c = \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}},$$

$$d = -\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial u}},$$

получим искомые производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = a \frac{\partial z}{\partial v} + b \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = c \frac{\partial z}{\partial v} + d \frac{\partial z}{\partial u}. \end{cases}$$

2.3.3 Обобщение процедуры покоординатного расчета для численного решения ДУ с помощью многопараметрических геометрических интерполянтов

Обобщив приведенный выше способ дифференцирования для 3-параметрической гиперповерхности отклика, принадлежащей 4-мерному пространству и заданной в неявном виде $F(x, y, z, t) = 0$, где $x = f_1(u, v, w)$, $y = f_2(u, v, w)$, $z = f_3(u, v, w)$, $t = f_4(u, v, w)$, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial t}{\partial z}; \\ \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial t}{\partial z}; \\ \frac{\partial t}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial t}{\partial z}. \end{cases}$$

Применим метод Крамера для нахождения неизвестных $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ и $\frac{\partial t}{\partial z}$:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial t}{\partial w} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}.$$

Вычислив определители по правилу треугольника, находим:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = a_x \frac{\partial t}{\partial u} + b_x \frac{\partial t}{\partial v} + c_x \frac{\partial t}{\partial w},$$

$$\text{где } a_x = \frac{\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w}}{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w}};$$

$$b_x = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial w}}{\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w}};$$

Предложенный способ может иметь и дальнейшее обобщение для численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов, принадлежащих многомерному аффинному пространству.

2.4 Критерий оценки точности результатов численного моделирования с помощью многомерных геометрических интерполянтов

В процессе численного решения дифференциальных уравнений возникает вопрос оценки точности полученных результатов. Особенно это важно на стадии тестирования новых методов численного решения ДУ, когда известно эталонное решение.

Точность численного решения ДУ удобно проверять, используя методы научной визуализации, но при большом количестве переменных возникают сложности с визуализацией многомерного пространства. Поэтому для проверки точности численного решения ДУ предложен способ числовой оценки, который состоит из двух этапов. Первый этап предусматривает дискретизацию численного и эталонного решения в виде множества дискретно заданных точек, а второй – в сравнении полученных дискретных точечных множеств с помощью какого-либо критерия сходства. Тогда чем больше количество точек множества, тем более точно можно оценить степень сходства, но если два решения имеют близкие форму и положение, то при любом количестве точек степень сходства будет высокой.

Одной из особенностей точечного исчисления [13] является то, что все геометрические объекты в точечном исчислении представляются организованным множеством точек, которые определяются с помощью текущей точки. Текущая точка своим движением заполняет пространство, формируя тем самым геометрический объект. За движение текущей точки отвечает текущий параметр, который является инвариантом параллельного проецирования и в большинстве случаев изменяется от 0 до 1. Непрерывное изменение текущего параметра в указанных пределах формирует непрерывный геометрический объект. Однако, если зафиксировать ряд значений текущего параметра, то можно выделить ряд

фиксированных точек, которые принадлежат моделируемому геометрическому объекту. Когда таких точек выделено достаточно много, они с высокой точностью могут охарактеризовать геометрическую модель. Эту особенность точечного исчисления предлагается использовать для сравнения нескольких геометрических объектов с учетом обобщения на многомерное аффинное пространство.

Многомерный геометрический объект в общем виде определяется следующим точечным уравнением:

$$M = \sum_{i=1}^m A_i p_i(u, v, w, \dots), \quad (2.19)$$

где A_i – исходные точки, координаты которых в соответствии с геометрической теорией многомерной интерполяции [58, 154, 155, 156] соответствуют исходным экспериментально-статистическим данным;

$p_i(u, v, w, \dots)$ – непрерывные функции от параметров;

u, v, w, \dots – текущие параметры точечного уравнения, которые в большинстве случаев изменяются от 0 до 1;

m – количество исходных точек.

Переходя от точечного уравнения к системе однотипных параметрических уравнений, которые являются проекциями геометрического объекта на оси глобальной системы координат, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \sum_{i=1}^m x_{A_i} p_i(u, v, w, \dots) \\ y = \sum_{i=1}^m y_{A_i} p_i(u, v, w, \dots) \\ z = \sum_{i=1}^m z_{A_i} p_i(u, v, w, \dots) \\ \dots \end{array} \right.$$

Здесь важно выделить одну тонкость. Степень совпадения многомерных геометрических объектов определяется степенью совпадения по всем его координатам. Если геометрические объекты заданы уравнениями в явном виде

(например, поверхность $z = f(x, y)$), то задавая одинаковые значения переменных x и y , можно оценить степень совпадения поверхностей сравнивая между собой соответствующие значения координаты z . В нашем же случае имеет место система параметрических уравнений, для которой одни и те же значения параметров могут давать разные координаты точек, не соответствующие друг другу. Поэтому для корректного сравнения многомерных геометрических объектов в точечном исчислении необходимо обязательно выполнить взаимоувязку параметров точечных уравнений. В некоторых случаях, при равномерном распределении исходных экспериментально-статистических данных, можно воспользоваться особыми свойствами кривых, проходящих через наперед заданные точки, полученные на основе полиномов Бернштейна [56], чтобы перейти от системы параметрических уравнений к уравнению в явном виде. Однако, равномерное распределение исходных экспериментально-статистических данных является частным случаем и не всегда является возможным в инженерной и научной практике. С другой стороны, если есть такая возможность, то при составлении матрицы планирования эксперимента лучше использовать регулярную многомерную сеть экспериментальных точек, что в значительной мере облегчит дальнейшую математическую обработку и анализ полученных данных.

Как уже было отмечено выше, непрерывно изменяя значения текущих параметров u, v, w, \dots в точечном уравнении (2.19) от 0 до 1, получим непрерывный многомерный геометрический объект. Но если значения параметров взять с каким-либо шагом, то получим множество дискретных точек, которые принадлежат этому геометрическому объекту. Например, для линии, характеризующей однофакторный процесс, используя шаг 0,1 для параметра u , получим множество, состоящее из 11 дискретных точек, если этот же шаг использовать для поверхности, характеризующей двухфакторный процесс, то получим множество, состоящее из 121 дискретной точки, и т.д. Сравнивая полученные множества дискретных точек, можно оценить их сходство. Конечно, чем больше количество точек множества, тем более точно можно оценить степень сходства, но если два геометрических

объекта имеют очень близкие форму и положение, то при любом количестве точек сходство будет очень высоким. Наиболее популярным в инженерной практике является метод сравнения с помощью коэффициента детерминации.

В соответствии с [141] для оценки точности геометрической модели, полученной с помощью многомерной аппроксимации, обычно используется коэффициент детерминации, который представляет собой дополнение до единицы отношения суммы квадратов регрессионных остатков к общей дисперсии:

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^m (\bar{y} - y_i)^2}, \quad (2.20)$$

где $\sum_{i=1}^m (\hat{y}_i - y_i)^2$ – сумма квадратов регрессионных остатков, которая включает фактические y_i и расчетные \hat{y}_i значения исследуемой переменной;

$\sum_{i=1}^m (\bar{y} - y_i)^2$ – общая дисперсия;

\bar{y} – выборочное среднее.

Коэффициент детерминации, который определяется формулой (2.20), может использоваться в качестве критерия оценки сходства численного и эталонного решений ДУ, только при его расчете в качестве фактических значений принимаются значения одного точечного множества, соответствующего эталонному решению, а в качестве расчетных – численному решению. Аналогичным образом для сравнения результатов моделирования могут быть адаптированы и другие статистические критерии оценки сходства.

У предложенного способа числовой оценки точности результатов моделирования есть ещё одна важная особенность, связанная с тем, что одно и то же решение может иметь различную математическую формализацию, которую зачастую нельзя преобразовать из одного вида в другой. Вместе с тем, геометрическим отображением такого формализованного аналитического решения может быть один и тот же геометрический объект, что создаёт серьёзную проблему сравнения полученных результатов. Эта проблема могла бы найти своё решение посредством научной визуализации. Но учитывая сложность визуализации многомерного пространства, такой подход может иметь применение только для дифференциальных уравнений с размерностью лапласиана не выше 1

(Таблица 2.1). Поэтому выполняя дискретизацию с формированием точечных множеств и последующим их сравнением между собой, эта проблема полностью нивелируется. В результате полученная с помощью коэффициента детерминации числовая оценка зависит исключительно от количества дискретных точек множества и не зависит от их исходного аналитического представления.

2.5 Выводы по разделу 2

1. Предложен метод численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов, который легко обобщается на многомерное пространство. Поэтому его можно использовать для решения ДУ со сколь угодно большим количеством переменных.

2. Предложена классификация дифференциальных уравнений в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбрать геометрический интерполюнт для аппроксимации численного решения ДУ.

3. Разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов на регулярных и нерегулярных сетях. При этом вычислительный алгоритм решения ДУ остается инвариантным по отношению к количеству переменных, увеличивается лишь размерность геометрического интерполянта и количество уравнений по координатного расчета.

4. Предложено обобщение процедуры по координатного расчета для численного решения ДУ с помощью многопараметрических геометрических интерполянтов, что позволяет реализовать предложенный метод численного решения дифференциальных уравнений не только на регулярных, но и на нерегулярных многомерных сетях точек.

5. Предложен способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных геометрических интерполянтов, который позволяет получить числовую оценку степени сходства, численного и эталонного решений ДУ. Предложенный способ, основанный на дискретизации численного и

эталонного решений для их сравнения как в явном, так и в параметрическом виде, вне зависимости от выбора критерия оценки, может найти широкое применение в научных исследованиях по различным областям науки и техники.

РАЗДЕЛ 3

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ВЕРИФИКАЦИИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ИНТЕРПОЛЯНТОВ

В связи со стремительным развитием информационных технологий и систем автоматизированного проектирования сокращаются сроки проектирования и подготовки производства для выпуска новой и модернизируемой продукции, оптимизируется и усовершенствуется процесс проектирования, возрастает оперативность и обоснованность принимаемых решений на различных уровнях предприятия. В настоящее время любые пакеты автоматизированного проектирования используют численные методы решения ДУ. Автор ставится задача апробировать метод численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрического интерполянта, при этом для наглядности предлагается рассмотреть его на простых примерах.

3.1 Моделирование напряженно-деформированного состояния шарнирно-опертой на двух концах балки с распределенной нагрузкой

Задачи расчетов пространственных конструкций представляют собой очень важную и актуальную составляющую современных прикладных задач в целом. Напряженно-деформированное состояние различных конструкций или их отдельных элементов описывается дифференциальными уравнениями. Вид этих уравнений для каждого конкретного случая зависит от физических и геометрических характеристик, которые принимаются при моделировании поведения системы.

Рассмотрим ДУ второго порядка, которое описывает напряженно-деформированное состояние балки [37]:

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (3.1)$$

где $M(x)$ – изгибающий момент; I – момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости сечения и проходящей через его центр тяжести; E – модуль Юнга материала балки.

Изгибающий момент $M(x)$ можно выразить через известную внешнюю нагрузку $q(x)$, действующую на балку

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dx} = q(x) \\ \frac{dM}{dx} = Q \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x).$$

С учетом этого выражения дифференциальное уравнение (3.1) принимает вид:

$$M(x) = EI \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right) = q(x).$$

В случае постоянной жесткости EI получим ДУ четвертого порядка, которое описывает напряженно-деформированное состояние балки [37]:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI} \quad (3.2)$$

Для решения уравнений (3.1) и (3.2) применимы указанные выше численные методы [72], а также существуют специальные расчетные формулы в технической литературе для вычисления максимальной нагрузки и прогиба балки [115]. В данной работе предлагается найти численное решение указанных ДУ методами геометрического моделирования [68, 153].

Рассмотрим указанный метод решения ДУ на следующих примерах.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0,00239x(9 - x) \quad (3.3)$$

на интервале $x \in [0; 9]$ с граничными условиями $y(0) = y(9) = 0$.

Данное уравнение при задании соответствующих граничных условий определяет прогиб балки, шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В качестве аппроксимирующей функции примем полином Бернштейна 4-й степени, который описывает алгебраическую кривую 4-го порядка. В соответствии с геометрической теорией многомерной интерполяции [60] такая кривая определяется следующим точечным уравнением:

$$M = M_1p_1 + M_2p_2 + M_3p_3 + M_4p_4 + M_5p_5, \quad (3.4)$$

где M – текущая точка дуги алгебраической кривой 4-го порядка;

M_i – точки – узлы интерполяции;

$$p_1 = \bar{t}^4 - \frac{13}{3}\bar{t}^3t + \frac{13}{3}\bar{t}^2t^2 - \bar{t}t^3;$$

$$p_2 = 16\bar{t}^3t - \frac{64}{3}\bar{t}^2t^2 + \frac{16}{3}\bar{t}t^3;$$

$$p_3 = -12\bar{t}^3t + 40\bar{t}^2t^2 - 12\bar{t}t^3;$$

$$p_4 = \frac{16}{3}\bar{t}^3t - \frac{64}{3}\bar{t}^2t^2 + 16\bar{t}t^3;$$

$$p_5 = -\bar{t}^3t + \frac{13}{3}\bar{t}^2t^2 - \frac{13}{3}\bar{t}t^3 + t^4;$$

t – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до 1.

Выполнив по координатный расчет, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5; \\ y = y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3 + y_4p_4 + y_5p_5. \end{cases} \quad (3.5)$$

Будем закладывать равномерное распределение точек по оси Ox . Для этого разобьем интервал $x \in [0,9]$ на 4 равные части и получим следующие значения координат узловых точек: $x_1 = 0$; $x_2 = 2,25$; $x_3 = 4,5$; $x_4 = 6,75$; $x_5 = 9$.

Тогда система параметрических уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = 9t; \\ y = y_1p_1 + y_2p_2 + y_3p_3 + y_4p_4 + y_5p_5. \end{cases}$$

Выразив переменную t через x , получим уравнение дуги аппроксимирующей

кривой в явном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{9}; \\ y = y_1 \left(1 - \frac{25}{27}x + \frac{70}{243}x^2 - \frac{80}{2187}x^3 + \frac{32}{19683}x^4 \right) + \\ + y_2 \left(\frac{16}{9}x - \frac{208}{243}x^2 + \frac{32}{243}x^3 - \frac{128}{19683}x^4 \right) + \\ + y_3 \left(-\frac{4}{3}x + \frac{76}{81}x^2 - \frac{128}{729}x^3 + \frac{64}{6561}x^4 \right) + \\ + y_4 \left(\frac{16}{27}x - \frac{112}{243}x^2 + \frac{224}{2187}x^3 - \frac{128}{19683}x^4 \right) + \\ + y_5 \left(-\frac{1}{9}x + \frac{22}{243}x^2 - \frac{16}{729}x^3 + \frac{32}{19683}x^4 \right). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Продифференцировав уравнение дуги аппроксимирующей кривой дважды и подставив результат дифференцирования в исходное дифференциальное уравнение, получим:

$$\begin{aligned} & y_1 \left(\frac{140}{243} - \frac{160}{729}x + \frac{128}{6561}x^2 \right) + y_2 \left(-\frac{416}{243} + \frac{64}{81}x - \frac{512}{6561}x^2 \right) + \\ & + y_3 \left(\frac{152}{81} - \frac{256}{243}x + \frac{256}{2187}x^2 \right) + y_4 \left(-\frac{224}{243} + \frac{448}{729}x - \frac{512}{6561}x^2 \right) + \\ & + y_5 \left(\frac{44}{243} - \frac{32}{243}x + \frac{128}{6561}x^2 \right) = -0,00239x(9-x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно условию, на концах интервала $[0; 9]$ значение функции равно нулю. Таким образом, при $x = 0$ и $x = 9$ примем $y_1 = y_5 = 0$.

При поочередной подстановке координат узловых точек $x_2 = 2,25$, $x_3 = 4,5$ и $x_4 = 6,75$ в (3.7) получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0; \\ -0,32922y_2 + 0,09876y_3 + 0,06584y_4 = -0,03625; \\ 0,26337y_2 - 0,49383y_3 + 0,26337y_4 = -0,04833; \\ 0,06584y_2 + 0,09876y_3 - 0,32922y_4 = -0,03625; \\ y_5 = 0; \end{array} \right. \quad (3.8)$$

решив которую, получим следующие значения:

$$y_1 = 0; y_2 = 0,29055; y_3 = 0,40779; y_4 = 0,29055; y_5 = 0. \quad (3.9)$$

После подстановки y_i ($i = \overline{1,5}$) (3.9) в уравнение (3.6) получим искомое уравнение дуги аппроксимирующей кривой:

$$y = 0,00020x^4 - 0,00358x^3 + 0,14499x. \quad (3.10)$$

Решение краевой задачи методом вариации произвольных постоянных [116] имеет вид:

$$y = 0,0001989x^4 - 0,00358x^3 + 0,1449908x. \quad (3.11)$$

Заметим, что решения (3.10) и (3.11) совпадают с высокой степенью точности даже на уровне полиномиальных коэффициентов.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0,0048 \quad (3.12)$$

на интервале $x \in [0; 9]$ со следующими граничными условиями $y(0) = y(9) = 0$, $y'(9) = 0, y''(0) = 0$.

Данное уравнение при задании соответствующих граничных условий определяет прогиб балки, шарнирно опертой по концам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

В качестве аппроксимирующей дуги кривой примем полином Бернштейна 5-го порядка, который описывается следующим точечным уравнением [14, 91]:

$$M = M_1q_1 + M_2q_2 + M_3q_3 + M_4q_4 + M_5q_5 + M_6q_6, \quad (3.13)$$

где M – текущая точка дуги алгебраической кривой 4-го порядка;

M_i – точки – узлы интерполяции;

$$q_1 = \bar{t}^5 - \frac{77}{12}\bar{t}^4t + \frac{269}{24}\bar{t}^3t^2 - \frac{77}{12}\bar{t}^2t^3 + \bar{t}t^4;$$

$$q_2 = 25\bar{t}^4t - \frac{725}{12}\bar{t}^3t^2 + \frac{925}{24}\bar{t}^2t^3 - \frac{25}{4}\bar{t}t^4;$$

$$q_3 = -25\bar{t}^4t + \frac{1475}{12}\bar{t}^3t^2 - \frac{576}{6}\bar{t}^2t^3 + \frac{50}{3}\bar{t}t^4;$$

$$q_4 = \frac{50}{3} \bar{t}^4 t - \frac{576}{6} \bar{t}^3 t^2 + \frac{1475}{12} \bar{t}^2 t^3 - 25 \bar{t} t;$$

$$q_5 = -\frac{25}{4} \bar{t}^4 t + \frac{925}{24} \bar{t}^3 t^2 - \frac{725}{12} \bar{t}^2 t^3 + 25 \bar{t} t^4;$$

$$q_6 = \bar{t}^4 t - \frac{77}{12} \bar{t}^3 t^2 + \frac{269}{24} \bar{t}^2 t^3 - \frac{77}{12} \bar{t} t^4 + t^5;$$

t – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до 1.

Выполнив по координатный расчет, получим следующую систему параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 + x_4 q_4 + x_5 q_5 + x_6 q_6; \\ y = y_1 q_1 + y_2 q_2 + y_3 q_3 + y_4 q_4 + y_5 q_5 + y_6 q_6. \end{cases} \quad (3.14)$$

Закладываем равномерное распределение точек по оси Ox . Для этого разобьем интервал $x \in [0; 9]$ на 5 равных частей и получим значения координат узловых точек: $x_1 = 0; x_2 = 1,8; x_3 = 3,6; x_4 = 5,4; x_5 = 7,2; x_6 = 9$.

Тогда система параметрических уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} x = 9t; \\ y = y_1 q_1 + y_2 q_2 + y_3 q_3 + y_4 q_4 + y_5 q_5 + y_6 q_6. \end{cases}$$

Выразив переменную t через x , получим уравнение дуги аппроксимирующей кривой в явном виде. Продифференцировав его четырежды и подставив результат дифференцирования в исходное дифференциальное уравнение, находим:

$$\begin{aligned} & y_1 \left(\frac{625}{2187} - \frac{3125}{59049} x \right) + y_2 \left(-\frac{8750}{6561} + \frac{15625}{59049} x \right) + y_3 \left(\frac{16250}{6561} - \frac{31250}{59049} x \right) + \\ & + y_4 \left(-\frac{5000}{2187} + \frac{31250}{59049} x \right) + y_5 \left(\frac{6875}{6561} - \frac{15625}{59049} x \right) + y_6 \left(-\frac{1250}{6561} + \frac{3125}{59049} x \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Согласно условию, на концах интервала $[0; 9]$ значение функции равно нулю. Таким образом, при $x = 0$ и $x = 9$ примем $y_1 = y_6 = 0$.

Далее воспользуемся координатами узловых точек.

При $x = 3,6$ получим:

$$-0,38104y_2 + 0,57156y_3 - 0,38104y_4 + 0,09526y_5 = 0,00477.$$

При $x = 5,4$ получим:

$$0,09526y_2 - 0,38104y_3 + 0,57156y_4 - 0,38104y_5 = 0,00477.$$

В качестве уравнений в узловых точках $x = 1,8$ и $x = 7,2$ запишем уравнения граничных условий $y'(9) = 0, y''(0) = 0$ соответственно:

$$\begin{aligned} 0,69444y_2 - 1,85185y_3 + 2,77778y_4 - 2,77778y_5 &= 0, \\ -3,96091y_2 + 5,50412y_3 - 4,01235y_4 + 1,56893y_5 &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получим СЛАУ:

$$\begin{cases} y_1 = 0; \\ -0,38104y_2 + 0,57156y_3 - 0,38104y_4 + 0,09526y_5 = 0,00477; \\ 0,09526y_2 - 0,38104y_3 + 0,57156y_4 - 0,38104y_5 = 0,00477; \\ 0,69444y_2 - 1,85185y_3 + 2,77778y_4 - 2,77778y_5 = 0; \\ -3,96091y_2 + 5,50412y_3 - 4,01235y_4 + 1,56893y_5 = 0; \\ y_6 = 0, \end{cases}$$

решив которую, находим:

$$y_1 = 0; y_2 = 0,11692; y_3 = 0,16912; y_4 = 0,13780; y_5 = 0,05428; y_6 = 0.$$

Подставив полученные значения $y_i (i = \overline{1,6})$ в (3.15), получим искомое уравнение дуги аппроксимирующей кривой:

$$y = 0,00020x^4 - 0,00269x^3 + 0,07250x. \quad (3.16)$$

Следует отметить, что в качестве аппроксимирующей функции был выбран полином 5-й степени, но в результате аппроксимации в процессе решения коэффициент при x^5 оказался равным нулю. Это говорит о том, что даже при выборе избыточной степени полинома, метод отсекает лишние слагаемые и даст нужный результат.

В качестве эталонного примем решение, полученное методом вариации произвольных постоянных [116]:

$$y = 0,0001989x^4 - 0,002685x^3 + 0,0724954x. \quad (3.17)$$

Заметим, что решения (3.16) и (3.17) совпадают с высокой степенью точности даже на уровне полиномиальных коэффициентов.

3.2 Численное решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

Многие задачи математической физики сводятся к решению уравнения Лапласа с граничными условиями. Например, задача о кручении стержней произвольного поперечного сечения при определённых условиях сводится к решению уравнения Лапласа [16]. К двумерному уравнению Лапласа приводит также и задача изгиба призматического стержня [11]. Поэтому рассмотрим возможность его численного решения предложенным методом.

Пример 1. Найти функцию двух переменных $U = U(x, y)$ являющуюся решением уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (3.18)$$

в прямоугольнике $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ и удовлетворяющую на его границах следующим условиям:

$$U(0, y) = U(2, y) = 0, U(x, 0) = 0, U(x, 2) = \sin \frac{\pi x}{2}. \quad (3.19)$$

При решении краевых задач для уравнения Лапласа используются различные методы (метод разделения переменных, метод функции Грина, метод интегральных уравнений, вариационные методы, метод возмущений, современные методы компьютерной алгебры, численные методы и другие). В работе [46], используя метод разделения переменных (метод Фурье), найдено частное решение уравнения (3.18) с учетом граничных условий (3.19):

$$U(x, y) = \frac{1}{sh\pi} sh \frac{\pi y}{2} \sin \frac{\pi x}{2}. \quad (3.20)$$

Найдем решение краевой задачи (3.18)-(3.19) с помощью геометрического интерполянта.

Для аппроксимации решения рассматриваемого ДУ выбираем 2-параметрический геометрический интерполянт. Аналогично рассуждениям, приведенным в [62], определяем аппроксимирующую поверхность. Поскольку для решения дифференциальных уравнений второго порядка нужна дуга кривой как минимум 3-го порядка, автором рассматривается полином Бернштейна 3-го порядка, который однозначно определяется 4 точками. Это означает, что для определения образующей линии необходимо иметь 4 текущих точки, иначе – 4 направляющих линии. В случае, когда каждая из направляющих линий определяется 4 точками, получается отсек поверхности, проходящий через 16 наперед заданных точек. Следует отметить, что движение текущих точек направляющих линий согласовано одним параметром u , а движение текущей точки образующей линии определяется параметром v . Оба параметра изменяются в пределах от 0 до 1 [62].

Текущая точка поверхности отклика в трехмерном пространстве задается множеством исходных точек, которые рассматриваются на области прямоугольной формы. Для формирования регулярной сети точек точки по оси x и по оси y распределены равномерно в координатной плоскости Oxy . Это условие обеспечивает линейную зависимость между факторами влияния и параметрами множества точек u и v , необходимыми для определения функции отклика U .

На рисунке 3.1 приведена геометрическая схема моделирования отсека поверхности, проходящей через 16 наперед заданных точек.

Каждая из направляющих линий определяется точками A_i, B_i, C_i, D_i ($i = \overline{1,4}$) соответственно, а образующими являются линии $A_iB_iC_iD_i$ ($i = \overline{1,4}$).

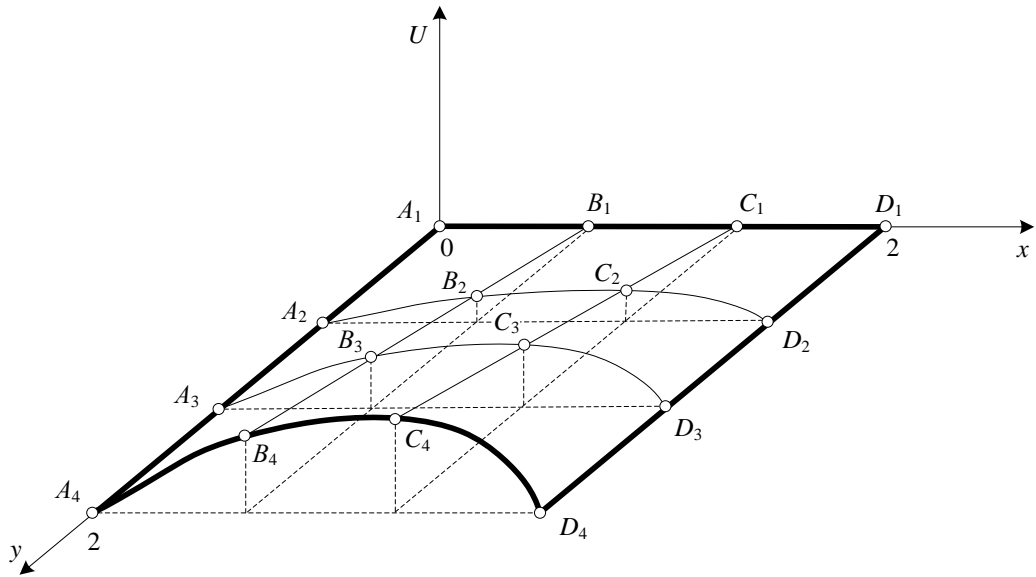


Рисунок 3.1 – Геометрическая схема моделирования отсека поверхности, проходящей через 16 наперёд заданных точек

Вычислительный алгоритм моделирования 16-точечного отсека поверхности определяется следующей последовательностью точечных уравнений [63]:

$$\begin{cases} A = A_1g_1 + A_2g_2 + A_3g_3 + A_4g_4, \\ B = B_1g_1 + B_2g_2 + B_3g_3 + B_4g_4, \\ C = C_1g_1 + C_2g_2 + C_3g_3 + C_4g_4, \\ D = D_1g_1 + D_2g_2 + D_3g_3 + D_4g_4, \\ M = Ak_1 + Bk_2 + Ck_3 + Dk_4. \end{cases} \quad (3.21)$$

где $g_1 = \bar{u}^3 - 2,5\bar{u}^2u + \bar{u}u^2$;

$$g_2 = 9\bar{u}^2u - 4,5\bar{u}u^2;$$

$$g_3 = -4,5\bar{u}^2u + 9\bar{u}u^2;$$

$$g_4 = \bar{u}^2u - 2,5\bar{u}u^2 + u^3;$$

$$k_1 = \bar{v}^3 - 2,5\bar{v}^2v + \bar{v}v^2;$$

$$k_2 = 9\bar{v}^2v - 4,5\bar{v}v^2;$$

$$k_3 = -4,5\bar{v}^2v + 9\bar{v}v^2k_3 = -4,5\bar{v}^2v + 9\bar{v}v^2;$$

$$k_4 = \bar{v}^2v - 2,5\bar{v}v^2 + v^3.$$

Для перехода от точечных уравнений (3.21) к параметрическим, необходимо выполнить покоординатный расчёт. Таким образом, первое из последовательности

точечных уравнений (3.21) будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} x_A = x_{A_1}g_1 + x_{A_2}g_2 + x_{A_3}g_3 + x_{A_4}g_4; \\ y_A = y_{A_1}g_1 + y_{A_2}g_2 + y_{A_3}g_3 + y_{A_4}g_4; \\ z_A = z_{A_1}g_1 + z_{A_2}g_2 + z_{A_3}g_3 + z_{A_4}g_4. \end{cases}$$

Остальные точечные уравнения последовательности (3.21), включающие направляющие и образующие поверхности отклика, сводятся к параметрическим уравнениям аналогичным образом.

Следует заметить, что моделируемый отсек поверхности должен удовлетворять граничным условиям (3.20). Рассмотрим их подробно.

Условие $U(0, y) = 0$ определяет фрагмент оси y при $0 \leq y \leq 2$, который проходит через точки $A_1(0,0)$, $A_2\left(0, \frac{2}{3}\right)$, $A_3\left(0, \frac{4}{3}\right)$, $A_4(0,2)$ (Рисунок 3.1), значения функции отклика на котором равняются нулю:

$$U(0,0) = U\left(0, \frac{2}{3}\right) = U\left(0, \frac{4}{3}\right) = U(0,2) = 0.$$

Условие $U(2, y) = 0$ представляет собой отрезок горизонтальной прямой $x=2$ при $0 \leq y \leq 2$, который, как видим по рисунку 3.1, проходит через точки $D_1(2,0)$, $D_2\left(2, \frac{2}{3}\right)$, $D_3\left(2, \frac{4}{3}\right)$, $D_4(2,2)$. На этом отрезке значения функции отклика равняются нулю:

$$U(2,0) = U\left(2, \frac{2}{3}\right) = U\left(2, \frac{4}{3}\right) = U(2,2) = 0.$$

Условие $U(x, 0) = 0$ определяет отрезок оси x $0 \leq x \leq 2$, проходящий через точки $A_1(0,0)$, $B_1\left(\frac{2}{3}, 0\right)$, $C_1\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $D_1(2,0)$ (Рисунок 3.1). Значения функции отклика на указанном участке оси x равняются нулю:

$$U(0,0) = U\left(\frac{2}{3}, 0\right) = U\left(\frac{4}{3}, 0\right) = U(2,0) = 0.$$

Условие $U(x, 2) = \sin \frac{\pi x}{2}$ при $0 \leq x \leq 2$ представляет собой кривую, проходящую через точки $A_4(0,2)$, $B_4\left(\frac{2}{3}, 2\right)$, $C_4\left(\frac{4}{3}, 2\right)$, $D_4(2,2)$ (Рисунок 3.1). Значения функции отклика в точках B_4 и C_4 (в точках A_4 и D_4 указаны выше) определяются следующим образом:

$$U\left(\frac{2}{3}, 2\right) = \sin \frac{\pi}{3}, U\left(\frac{4}{3}, 2\right) = \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Как видим, 12 точек из 16-ти определяются граничными условиями по квадратному контуру.

Для аппроксимации решения уравнения Лапласа с учётом начальных и граничных условий необходимо будет определить ещё 4 точки таким образом, чтобы их координаты удовлетворяли краевой задаче (3.18)-(3.19). Отсюда следует, что система линейных алгебраических уравнений будет состоять всего из четырех уравнений:

$$\begin{cases} -9U_{B_2} + 2,25U_{B_3} + 2,25U_{C_2} = 0, \\ 2,25U_{B_2} - 9U_{B_3} + 2,25U_{C_3} + 1,9486 = 0, \\ 2,25U_{B_2} - 9U_{C_2} + 2,25U_{C_3} = 0, \\ 2,25U_{B_3} + 2,25U_{C_2} - 9U_{C_3} + 1,9486 = 0, \end{cases}$$

где U_{B_2} , U_{B_3} , U_{C_2} , U_{C_3} – значения функции отклика U в промежуточных точках $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ соответственно.

Решив полученную СЛАУ, определим необходимые значения в узловых точках интерполянта. После чего подставим результат вычислений в уравнение аппроксимации. В результате уравнение аппроксимирующей поверхности будет иметь следующий вид:

$$U(x, y) = -0,137y^3x^2 + 0,274y^3x + 0,137y^2x^2 - 0,274y^2x - 0,213yx^2 + 0,426yx.$$

На рисунке 3.2 с разных ракурсов представлены наложенные друг на друга поверхности, которые дают графическое представление решения уравнения Лапласа. Зеленым цветом показан эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных. Радужным цветом изображен отсек аппроксимирующей поверхности отклика, который проходит через 12 наперёд заданных точек, удовлетворяющих граничным условиям (3.19), и 4 точки, удовлетворяющие краевой задаче (3.18)-(3.19); при этом промежуточные значения найдены с помощью двумерной интерполяции.

Как видно из представленного сравнения, аппроксимирующий 16-точечный отсек поверхности отклика с достаточно высокой точностью дублирует эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных.

Числовая оценка результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации составила 0,992.

Результаты сравнения и высокое значение коэффициента детерминации подтверждают достоверность численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов.

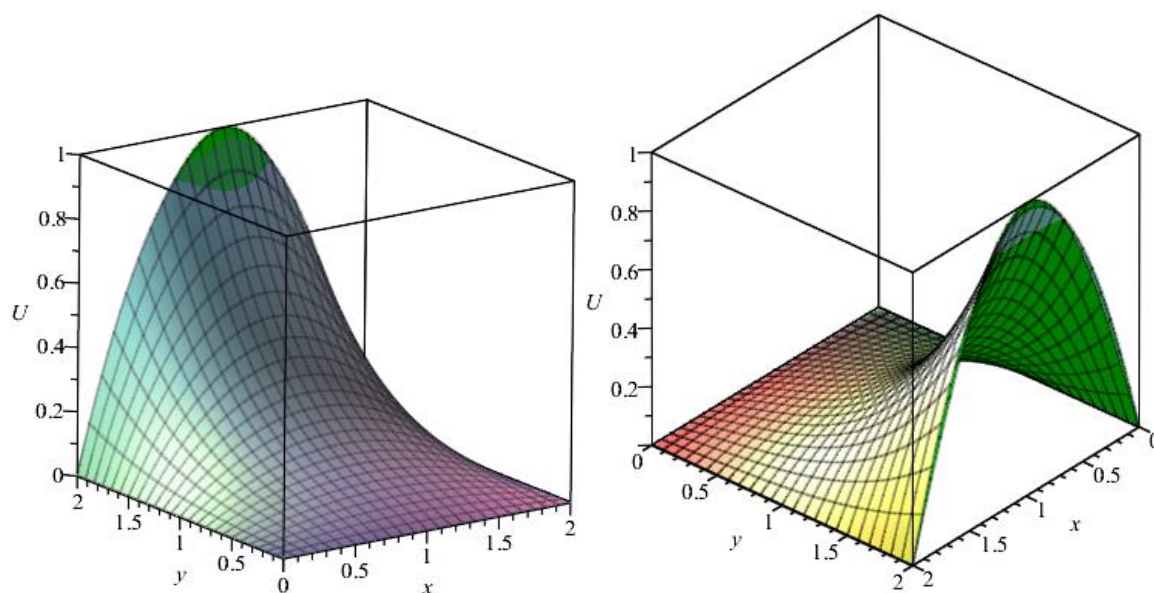


Рисунок 3.2 – Графическое сравнение результатов решения уравнения Лапласа с граничными условиями (3.19)

Пример 2. Найти функцию двух переменных $U = U(x, y)$, являющуюся решением уравнения Лапласа (3.18) в прямоугольнике $0 < x < 3$, $0 < y < 5$ и удовлетворяющую на его границах следующим условиям:

$$U(0, y) = 2 \sin \frac{\pi y}{5}, U(3, y) = 0, U(x, 0) = 4 \sin \frac{\pi x}{3}, U(x, 5) = 0. \quad (3.22)$$

В работе [129], используя метод разделения переменных (метод Фурье), приведено следующее частное решение уравнения с учетом граничных условий:

$$U(x, y) = \frac{4sh \frac{\pi(5-y)}{3}}{sh \frac{5\pi}{3}} \sin \frac{\pi x}{3} + \frac{2sh \frac{\pi(3-x)}{5}}{sh \frac{3\pi}{5}} \sin \frac{\pi y}{5}.$$

Для аппроксимации решения краевой задачи (3.18), (3.22) аналогично примеру 1 выбираем 2-параметрический геометрический интерполянт.

Также, как и в примере 1, двенадцать точек из 16-ти определяются граничными условиями по прямоугольному контуру. Для аппроксимации решения уравнения Лапласа с учётом начальных и граничных условий необходимо будет определить ещё 4 точки таким образом, чтобы их координаты удовлетворяли краевой задаче (3.18), (3.22). Тогда СЛАУ также будет состоять из четырех уравнений. В результате уравнение аппроксимирующей поверхности принимает следующий вид:

$$U(x, y) = 0,030y^3x^2 - 0,090y^3x + 0,006y^2x^3 - 0,385y^2x^2 + 1,209y^2x - 0,312y^2 - 0,028yx^3 + 1,523yx^2 - 4,837yx - 1,732x^2 + 1,559y + 5,196x.$$

На рисунке 3.3 с разных ракурсов представлены наложенные друг на друга поверхности, которые дают графическое представление решения уравнения Лапласа с заданными граничными условиями. Зеленым цветом показан эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных, а радужным – 16-точечный отсек аппроксимирующей поверхности отклика. Для 16-ти узловых точек выполняются условия краевой задачи (3.18), (3.22); при этом промежуточные значения найдены с помощью двумерной интерполяции.

Как видно из представленного сравнения, с достаточно высокой точностью аппроксимирующий 16-точечный отсек поверхности отклика дублирует эталонный отсек поверхности, полученный с помощью метода разделения переменных.

Числовая оценка результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации составила 0,968.

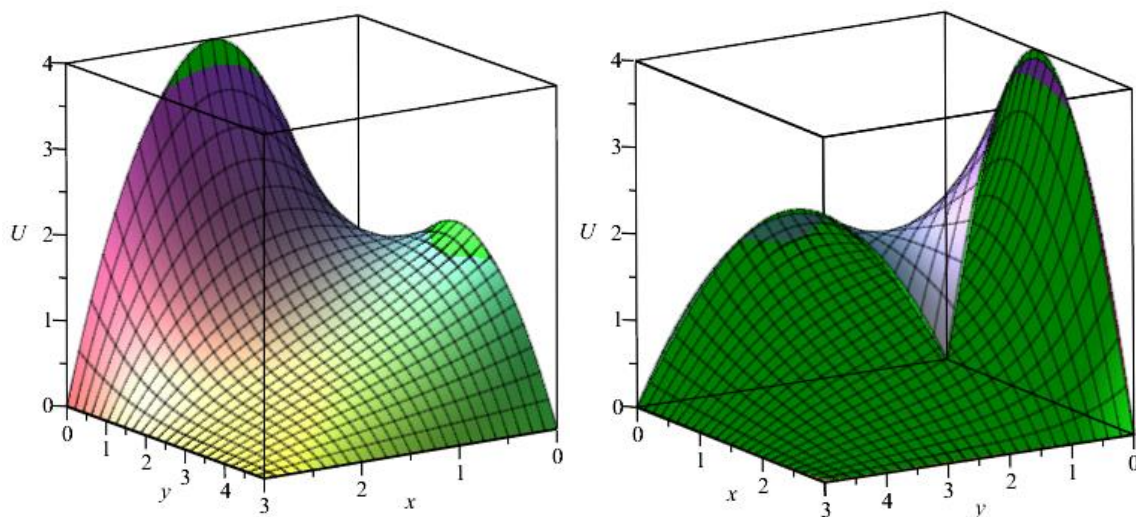


Рисунок 3.3 – Графическое сравнение результатов решения уравнения Лапласа с граничными условиями (3.22)

Результаты сравнения и высокое значение коэффициента детерминации подтверждают достоверность численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов. При этом дальнейшее использование полученного полиномиального уравнения для инженерно-технических расчётов является более предпочтительным, по сравнению с уравнением, полученным методом разделения переменных.

3.3 Выводы по разделу 3

1. Предложена математическая модель расчета балки при равномерно-распределенной нагрузке, выполненная путем аппроксимации численного решения дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования. В результате установлено совпадение с высокой степенью точности на уровне полиномиальных коэффициентов решений уравнений предложенным методом с точными решениями.

2. Выполнена аппроксимация численного решения дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования на примерах решения уравнения Лапласа с различными граничными условиями. Сравнение полученных

результатов с точными решениями демонстрирует высокую степень достоверности предложенного метода.

3. В результате проведенных вычислительных экспериментов доказана достоверность результатов численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов. При этом полученные с помощью геометрических интерполянтов полиномиальные зависимости являются более предпочтительными с точки зрения их дальнейшего использования, например, для определения экстремумов функции.

РАЗДЕЛ 4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ИНЖЕНЕРНЫХ СООРУЖЕНИЙ

В инженерной практике широкое распространение получили стальные тонкостенные оболочки вращения, которые включают: газгольдеры для хранения и распределения газов, силосы, трубопроводы больших диаметров, дымовые и вентиляционные трубы, водонапорные башни. К таким сооружениям относятся и стальные вертикальные цилиндрические резервуары для хранения нефтепродуктов. Имеющиеся случаи разрушения приведенных выше инженерных сооружений привели к необходимости периодического мониторинга их технического состояния в течение всего периода эксплуатации.

Основным конструктивным элементом вертикального цилиндрического резервуара для хранения нефтепродуктов является цилиндрическая стенка. Она представляет собой тонкостенную оболочку, на которую воздействуют объективные и субъективные факторы, изменяя ее первоначальную геометрическую форму. К объективным факторам можно отнести целый комплекс нагрузок: собственный вес конструкций, гидростатическое давление жидкости в резервуаре, вакуум, ветровая и снеговая нагрузки. К субъективным факторам относятся погрешности, связанные с изготовлением, транспортировкой и монтажом стенки резервуара. А также нарушение условий эксплуатации резервуара.

4.1 Моделирование деформированного состояния проектируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений

Исследованием напряженно-деформированного состояния (НДС) вертикальных стальных резервуаров занимались такие ученые, как Тимошенко С.П. [123, 124], Тарасенко А.А. [120, 121], Сафарян М.К. [109, 110], Чепур П.В. [132] и многие другие. Вместе с тем полученные в этих работах

решения являются искусственно смоделированными, имеющими ряд допусков и упрощений, и потому не всегда устойчивыми к изменению исходных данных.

4.1.1 Определение ДС резервуара аналитическим способом

Рассмотрим распределение перемещений в стальном вертикальном цилиндрическом резервуаре (ВЦР) со стенками постоянной толщины, которые подвергаются действию внутреннего давления жидкости. Согласно [123], решение такого рода задач аналитическим методом сводится к решению дифференциального уравнения:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4w = -\frac{\gamma(d-x)}{D}, \quad (4.1)$$

где w – компонента радиального перемещения перпендикулярно оси резервуара, м;

x – координата стенки по высоте, отсчитывая от уторного шва резервуара, м;

β – коэффициент деформации стенки, 1/м;

γ – удельный вес хранимой жидкости, Н/м³;

d – высота столба жидкости, м;

D – цилиндрическая жесткость оболочки при изгибе, кг·м.

Общее решение уравнения (4.1) имеет вид:

$$w = e^{\beta x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x}(C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + f(x), \quad (4.2)$$

где $f(x)$ – частное решение уравнения (4.1);

$C_i (i = \overline{1,4})$ – постоянные интегрирования, которые необходимо определять для каждого частного случая из условий на концах цилиндрической оболочки.

В работе [132] получено уравнение, с помощью которого можно вычислить прогиб в любой точке резервуара по высоте:

$$w = \frac{\gamma \cdot r^2}{E \cdot h} \left(d - x - e^{-\beta x} \left(d \cos \beta x + \left(d - \frac{1}{\beta} \right) \sin \beta x \right) \right), \quad (4.3)$$

где r – радиус резервуара, м;

E – модуль упругости при растяжении и сжатии для стали, Па;

h – толщина стенки, м.

В дальнейших исследованиях решение (4.3) будем называть эталонным.

4.1.2 Определение ДС резервуара методами геометрического моделирования

Найдем численное решение дифференциального уравнения (4.1) методами геометрического моделирования [68].

Решением дифференциального уравнения (4.1) является функция перемещений $w = w(x)$. Она представляет собой однопараметрическое множество точек – кривую линию. Функцию перемещений определим с помощью алгебраической кривой, проходящей через наперёд заданные точки [35, 63], как однопараметрический геометрический интерполянт. С учетом условий дифференцирования функции перемещений в уравнении (4.1) кривая должна быть не ниже 5-го порядка.

Тогда в качестве аппроксимирующей функции примем полином 5-й степени, который описывает алгебраическую кривую 5-го порядка. В соответствии с геометрической теорией многомерной интерполяции [60] такая кривая определяется точечным уравнением (3.13).

Затем посредством покоординатного расчёта перейдем от точечного уравнения к системе параметрических уравнений [60]:

$$\begin{cases} x = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 + x_5p_5 + x_6p_6, \\ w = w_1p_1 + w_2p_2 + w_3p_3 + w_4p_4 + w_5p_5 + w_6p_6. \end{cases} \quad (4.4)$$

В данной задаче координаты узлов интерполяции распределяются равномерно по оси Ox . Учитывая особые свойства алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки [35, 60, 63], первое уравнение системы принимает линейную зависимость $x = td$. Следовательно, для определения геометрического интерполянта в явном виде достаточно выполнить замену переменных во втором уравнении системы:

$$t = \frac{x}{d}.$$

Затем разобьем кривую на 6 равных по оси Ox частей и поочередно подставим в исходное дифференциальное уравнение (4.1) полученные значения x_j , где $j = \overline{0,6}$. Таким образом будет сформирована СЛАУ с шестью неизвестными w_j . Полученные в результате решения СЛАУ значения w_j подставим во второе уравнение системы (4.4), что и будет являться численным решением дифференциального уравнения (4.1) на интервале изменения переменной x от 0 до d .

4.1.3 Исходные данные для проведения вычислительных экспериментов

В качестве примера рассмотрим резервуар (Рисунок 4.1), который имеет следующие характеристики [132]:

- радиус резервуара – $r = 22,8$ м;
- толщина стенки резервуара – $h = 0,011$ м;
- высота столба жидкости – $d = 11,92$ м;
- удельный вес хранимой жидкости – $\gamma = 8485,65$ Н/м³;
- модуль упругости при растяжении и сжатии для стали – $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па;
- коэффициент Пуассона стали – $\mu = 0,3$.

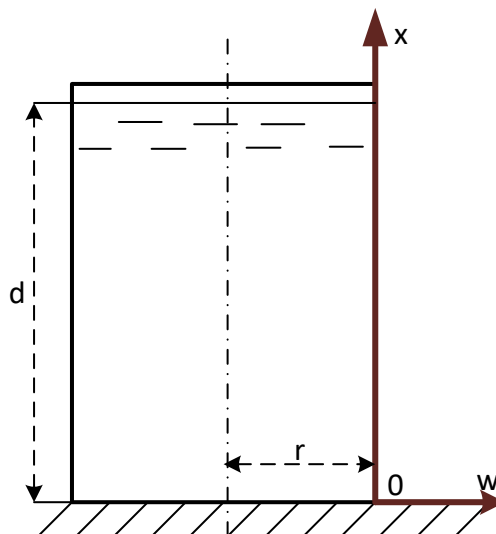


Рисунок 4.1 – Схема ВЦР

Перепишем уравнение (4.1) с учетом исходных данных. Для этого сначала рассчитаем значение цилиндрической жесткости D и коэффициент деформации стенки β по соответствующим формулам [132]:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (4.5)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4 \cdot D}}, \quad (4.6)$$

$$K = \frac{E \cdot \delta}{R^2}. \quad (4.7)$$

Таким образом, получим: $D = 25596,15 \text{ кг} \cdot \text{м}$, $K = 4,444 \cdot 10^6$, $\beta = 2,567$.

С учетом исходных данных и рассчитанных коэффициентов уравнение (4.1) примет вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 173,6071w = -3,9517 + 0,3315x. \quad (4.8)$$

В рассматриваемой задаче предполагается, что нижний край стенки резервуара зашпелен в абсолютно жесткий фундамент, следовательно:

$$w(0) = 0. \quad (4.9)$$

При $x = d$ гидростатическое давление хранимой жидкости отсутствует, но выше за счёт паров от хранения нефтепродуктов появляется эффект разряжения между уровнем жидкости и крышей резервуара. С учётом этого примем следующее условие:

$$w(d) = 0. \quad (4.10)$$

Таким образом, для поиска решения уравнения (4.8) методами геометрического моделирования достаточно только двух граничных условий (4.9)-(4.10).

4.1.4 Анализ результатов моделирования деформированного состояния резервуара

В результате проведения вычислительного эксперимента было получено уравнение 5-го порядка (с учётом округления полиномиальных коэффициентов), которое является численным решением дифференциального уравнения (4.1) и характеризует перемещения в любой точке цилиндрического резервуара по высоте:

$$w(x) = -2,47 \cdot 10^{-6}x^5 + 8,82 \cdot 10^{-5}x^4 - 1,19 \cdot 10^{-3}x^3 + 7,51 \cdot 10^{-3}x^2 - 1,99 \cdot 10^{-2}x. \quad (4.11)$$

Эталонное решение дифференциального уравнения (4.1), полученное в работе [132], для рассматриваемых характеристик с учётом округления коэффициентов имеет вид:

$$w_9(x) = 0,022e^{-2,567x} \sin 2,567x + 0,023e^{-2,567x} \cos 2,567x - 0,002x - 0,023. \quad (4.12)$$

Сравнить полученные решения (4.11)-(4.12) достаточно сложно. Поэтому автором было проведено сравнение численного решения и эталонного с помощью графической визуализации (Рисунок 4.2).

Из рисунка 4.2 виден невысокий уровень сходства кривых. В связи с этим автором был проведен ряд экспериментов моделирования функции перемещения кривыми 6-го порядка и выше. Графическая визуализация наиболее значимых результатов представлена на рисунке 4.3.

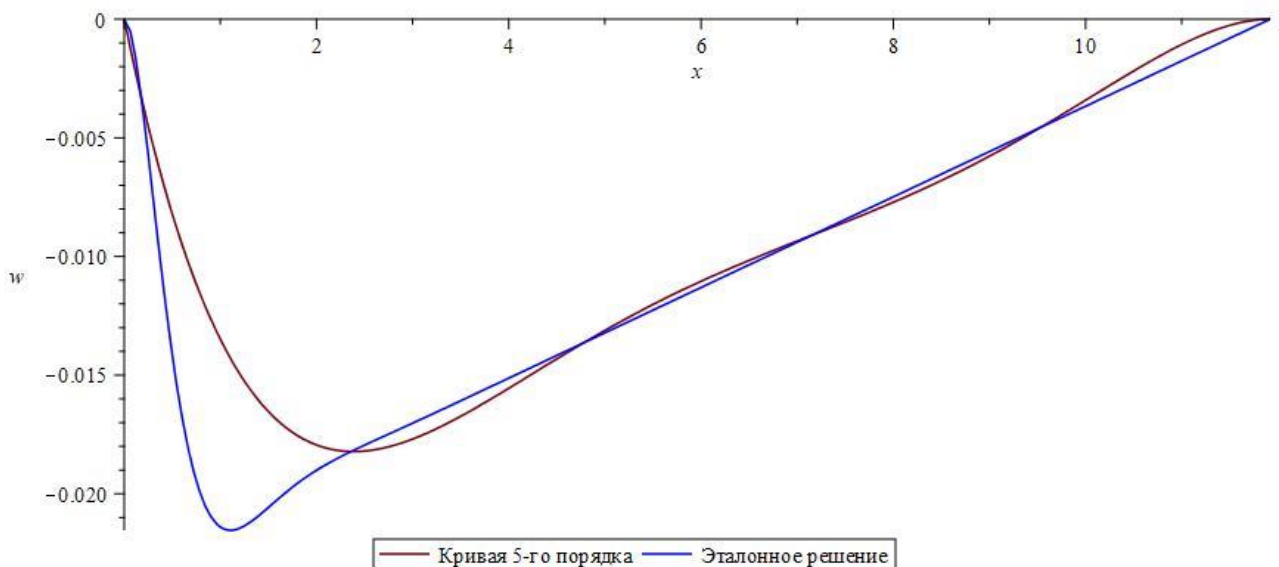


Рисунок 4.2 – Сравнение численного (кривая 5-го порядка) и эталонного решений

Как видно из рисунка 4.3 на промежутке изменения переменной x от 3 до 10 все моделируемые кривые совпадают с эталонной. На других участках имеют место отклонения.

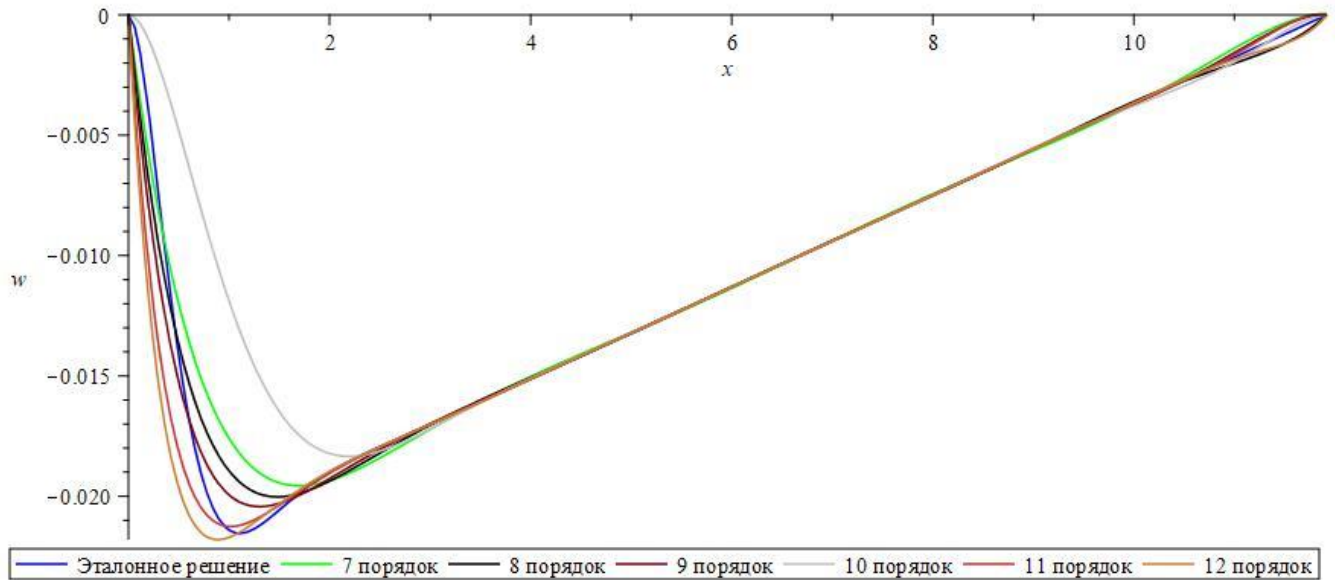


Рисунок 4.3 – Сравнение эталонного решения с численными (кривые 6-го порядка и выше)

Для числового определения степени родства эталонного и численного решений автор воспользовался методом сравнения многомерных геометрических объектов с помощью коэффициента детерминации \tilde{R}^2 (формула (2.20)).

Для этого кривые были дискретизированы. В качестве фактических значений были приняты значения точечного множества, выбранного в качестве эталонного; в качестве расчётных – моделируемого. Для каждой пары были вычислены квадраты регрессионных остатков, общая дисперсия и коэффициент детерминации.

Расчет критерия оценки сходства геометрических объектов был выполнен при различных размерах сети дискретных точек, принадлежащих моделируемому геометрическому объекту. Результаты исследований представлены на рисунке 4.4.

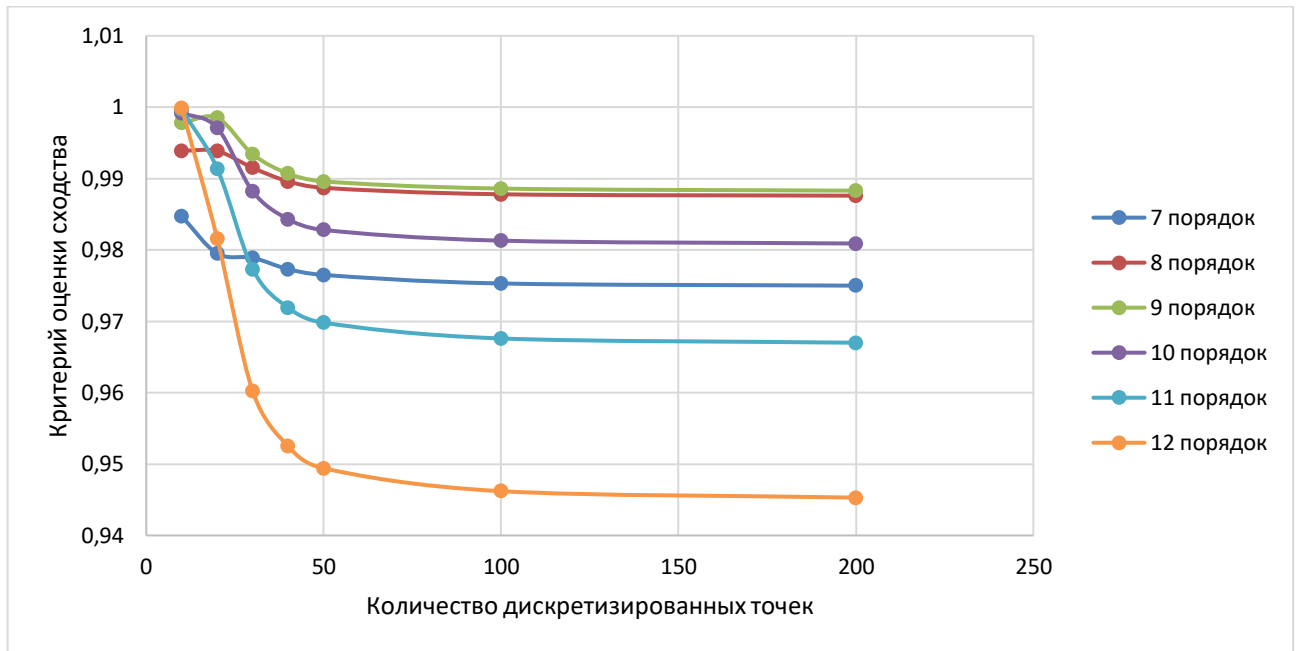


Рисунок 4.4 – Анализ влияния дискретизации точек на критерий оценки сходимости геометрических объектов

Приведенные на рисунке 4.4 графики показывают достаточно высокое значение коэффициента детерминации для моделируемых кривых. Наилучшим является коэффициент детерминации для кривой 9-го порядка, уравнение которой имеет вид:

$$w(x) = -5,22 \cdot 10^{-9}x^9 + 3,11 \cdot 10^{-7}x^8 - 7,95 \cdot 10^{-6}x^7 + 1,14 \cdot 10^{-4}x^6 - 1,01 \cdot 10^{-3}x^5 + 5,69 \cdot 10^{-3}x^4 - 0,02x^3 + 0,04x^2 - 4,77 \cdot 10^{-2}x.$$

Следовательно, ее можно использовать для расчета перемещений в любой точке резервуара по высоте, а также для решения других более сложных задач.

Необходимо отметить, что для конкретного примера после 50 дискретизированных точек значения критерия оценки сходимости выравниваются и уже существенно не меняются, оставаясь в пределах $\tilde{R}^2 = 0,988$.

4.2 Моделирование деформированного состояния эксплуатируемых тонкостенных оболочек инженерных сооружений

Среди методов диагностики технического состояния цилиндрических резервуаров с учетом несовершенств геометрической формы наибольшее распространение получили методы на основе моделирования как общих, так и местных несовершенств геометрической формы [45, 140, 143, 149, 163]. В работах [69, 71, 79] предложена методика, в соответствии с которой выполняется интерполяция поверхности резервуара с помощью замкнутых и незамкнутых обводов первого порядка гладкости с последующим расчетом напряженно-деформированного состояния в системе конечно-элементного анализа. Такой подход обладает рядом преимуществ и открывает новые возможности для анализа технического состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учетом геометрической и конструктивной нелинейности, а также для прогнозирования влияния развития несовершенств геометрической формы на прочность и устойчивость исследуемой оболочки. С другой стороны, предложенная в работах [69, 71, 79] методика содержит ряд особенностей. Во-первых, расчет напряженно-деформированного состояния резервуара для хранения нефтепродуктов, содержащий 65854 конечных элементов в виде прямоугольных пластин в нелинейной постановке (с учетом геометрической и конструктивной нелинейности), занял более 25 часов на компьютере под управлением процессора Intel Core i5-2400 (4-ядерный процессор с максимальной тактовой частотой 3,40 GHz), что для выполнения инженерных изысканий достаточно долго. Во-вторых, сложности учета конструктивной нелинейности, приводящей к необходимости реализации особой схемы поэтапного нагружения, предложенной в работе [69].

Все это приводит к необходимости усовершенствования существующих методик оценки технического состояния эксплуатируемых стальных тонкостенных оболочек инженерных сооружений, в том числе и резервуаров для хранения нефтепродуктов, для разработки эффективных мер по увеличению срока их безопасной эксплуатации, которые основаны на численном моделировании деформированного состояния.

4.2.1 Составление дифференциального уравнения равновесия элемента цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы

В отечественной литературе широкое распространение получила модель определения деформированного состояния упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении [73, 123]. При этом получается дифференциальное уравнение, которое имеет точное математическое решение с учетом граничных условий [123]:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Ehw}{r^2(1 - \alpha\mu)} = p,$$

где w – искомые перемещения от действия гидростатической нагрузки;

x – координата стенки по высоте, отсчитывая от уторного шва резервуара, м;

r – радиус цилиндрического резервуара, м;

h – толщина стенки цилиндрического резервуара, м;

p – равномерно распределенная нагрузка, Па;

$E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль Юнга для стали;

$\mu = 0,3$ – коэффициент Пуассона;

α – параметр, который в соответствии с [73] при одноосном напряженном состоянии принимается равным 0 (гидростатическое давление в открытом цилиндрическом сосуде), а при внутреннем газовом давлении в замкнутом цилиндрическом сосуде принимается равным 0,5;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} - \text{цилиндрическая жесткость.}$$

Вместе с тем, наличие даже незначительных несовершенств геометрической формы, которые выражаются в виде отклонений стенки резервуара от вертикали, приводят к тому, что нагружение оболочки становится не осесимметричным. К тому же наличие геометрической нелинейности приводит в данном случае к необходимости учитывать еще и конструктивную нелинейность, возникающую в процессе заполнения резервуара жидкостью [69]. Поэтому возникает

необходимость уточнения исходного дифференциального уравнения с учетом начальных отклонений поверхности цилиндрической оболочки от вертикали.

Составляем исходное уравнение равновесия в соответствии с рисунком 4.5, на котором изображен бесконечно малый элемент цилиндрического резервуара $dx dy$ со всеми действующими нагрузками и усилиями в сечениях:

$$2N_2 \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{dQ_1}{dx} - p dx dy = 0.$$

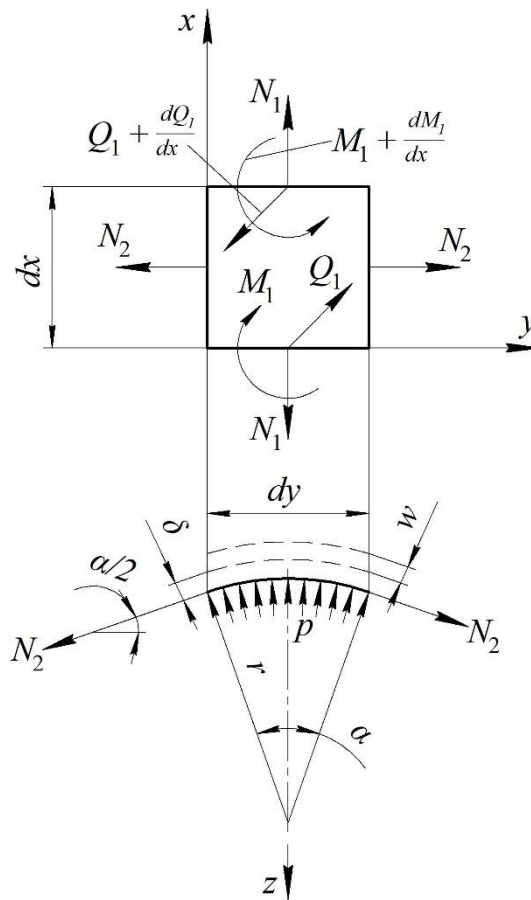


Рисунок 4.5 – Схема составления дифференциального уравнения равновесия элемента цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы

В соответствии с [73] принимаем размер квадратного элемента $dx = dy = \alpha r = 1$.

При малых значениях угла α значение $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2r}$. Тогда исходное дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{N_2}{r} + \frac{dQ_1}{dx} - p = 0.$$

Выразим усилие N_2 через соответствующую деформацию ε_2 . С учетом начальных отклонений от вертикали δ , получим:

$$\varepsilon_2 = \frac{\alpha(r + \delta + w) - \alpha r}{\alpha r} = \frac{w + \delta}{r} = \frac{1}{kE} \left(\frac{N_2}{h} - \mu \frac{N_1}{h} \right),$$

где $\delta = \delta(x)$ – функция исходных отклонений цилиндрического резервуара от вертикали;

k – поправочный коэффициент, учитывающий при расчете геометрическую и конструктивную нелинейность [69, 71, 79], а также напряжения, возникающие в верхнем поясе оболочки за счет ее взаимодействия с крышей резервуара.

Из рисунка 4.5, исходя из подобия прямоугольных треугольников, имеем $N_1 = N_2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} N_2$. Тогда получим:

$$\varepsilon_2 = \frac{w + \delta}{r} = \frac{N_2}{kEh} \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2} \right).$$

Отсюда определяем усилие N_2 :

$$N_2 = \frac{kEh(w + \delta)}{r \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2} \right)}.$$

Учитывая, что $Q_1 = \frac{dM_1}{dx}$ и, следовательно, $\frac{dQ_1}{dx} = \frac{d^2M_1}{dx^2}$, получим:

$$\frac{d^2M_1}{dx^2} + \frac{kEh(w + \delta)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2} \right)} = p.$$

Последнее уравнение содержит две неизвестных: M_1 и w . Исключив одно из них, выразим усилие через перемещения. Согласно закону Бернулли, имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{D},$$

где ρ – радиус кривизны при изгибе оболочки в меридиональном направлении.

С другой стороны, геометрически кривизна определяется следующим выражением:

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

При малых перемещениях w возникают малые кривизны K . Тогда величина $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$ является настолько малой по сравнению с единицей, что ей можно пренебречь. В результате получим $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2w}{dx^2}$.

Продифференцируем дважды приближенное значение кривизны:

$$\frac{d^2M_1}{dx^2} = D \frac{d^4w}{dx^4}.$$

В результате получим дифференциальное уравнение с неизвестной функцией перемещений $w = w(x)$:

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{kEh(w + \delta)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2}\right)} = p.$$

Определим равномерно распределенную гидростатическую нагрузку p линейным соотношением: $p = -\gamma g(d - x)$, где γ – плотность хранимой жидкости, кг/м³; g – ускорение свободного падения (принимаем 9,81 м/с²); d – высота уровня жидкости в резервуаре, м.

Тогда итоговое дифференциальное уравнение принимает следующий вид:

$$D \frac{d^4w}{dx^4} + \frac{kEh(w + \delta)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha\mu}{2}\right)} = \gamma g(x - d). \quad (4.14)$$

Учитывая, что исходные отклонения δ и искомые перемещения w являются функциями от переменной x , предложенное в работе [123] математически точное решение дает значительные погрешности (Рисунок 4.6), что приводит к необходимости его решения численным методом.

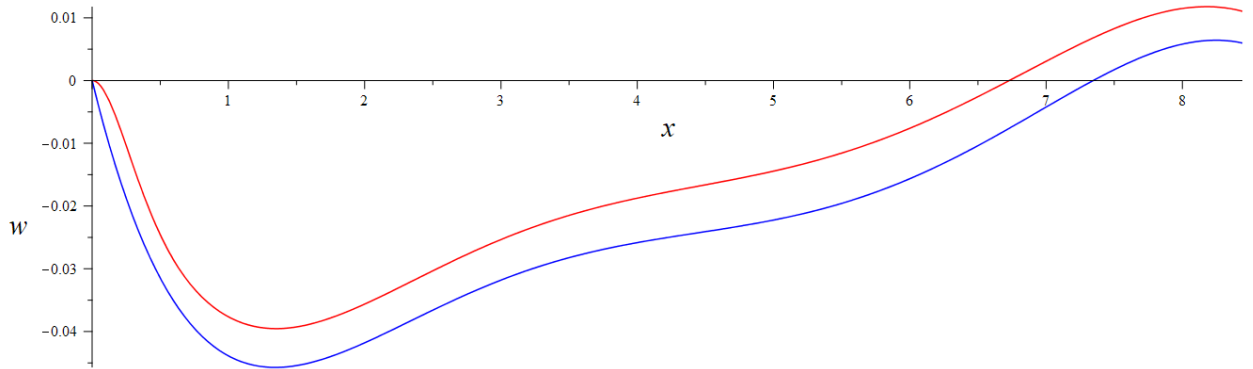


Рисунок 4.6 – Сравнение результатов решения дифференциального уравнения (4.14): синяя линия – эталонное решение; красная линия – математически точное решение, предложенное в [123]

Эталонное решение было получено путем аппроксимации значений перемещений от действия гидростатической нагрузки с учетом геометрической и конструктивной нелинейности [69, 71, 79] при моделировании напряженно-деформированного состояния в программном пакете конечно-элементного анализа SCAD. Расчеты были проведены в соответствии с прочностной теорией октаэдрических касательных напряжений или удельной энергии формоизменения (энергетическая теория Губера-Хенки-Мизера).

4.2.2 Описание метода численного решения дифференциального уравнения с помощью однопараметрического геометрического интерполянта

Метод численного решения дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов был рассмотрен в работах [153, 157, 158]. Его можно отнести к категории методов суперэлементов [78, 144, 151, 165, 167], применяемых для решения широкого круга инженерных и прикладных задач. Особенностью предложенного в работах [153, 157, 158] метода является то, что в качестве аппроксимирующей функции используется геометрический интерполянт – геометрический объект, проходящий через наперед заданные точки – узлы интерполяции. Таким образом, многомерный геометрический интерполянт

представляет собой суперэлемент, включающий информацию как о геометрических, так и о физических параметрах его состояния. Только в данном случае узлы интерполяции заранее неизвестны. Они вычисляются из условия соответствия исходному дифференциальному уравнению. Соответствие промежуточных точек исходному дифференциальному уравнению обеспечивается автоматически за счет интерполяции. Таким образом, чем больше узлов интерполяции, тем ближе геометрический интерполянт к искомому численному решению дифференциального уравнения. Такой подход по аналогии с изогометрическим методом [137, 142, 145, 152, 160, 168], предложенным Томом Хьюзом, позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами.

В данном случае решением дифференциального уравнения (4.14) является функция перемещений $w = w(x)$, которая представляет собой однопараметрическое множество – кривую линию. Определим функцию перемещений с помощью алгебраической кривой, проходящей через наперед заданные точки – однопараметрический геометрический интерполянт [154, 156]. Исходя из условий дифференцирования функции перемещений в уравнении (4.14) кривая должна быть не ниже 5 порядка.

В качестве проверки результатов моделирования каждая из эталонных кривых должна проходить через 7 точек. Следовательно, для их описания необходима кривая 6-го порядка. Исходя из этих соображений примем в качестве аппроксимирующей функции полином 6-й степени, который описывает алгебраическую кривую 6-го порядка. В соответствии с геометрической теорией многомерной интерполяции [60] такая кривая определяется следующим точечным уравнением:

$$M = M_1p_1 + M_2p_2 + M_3p_3 + M_4p_4 + M_5p_5 + M_6p_6 + M_7p_7, \quad (4.15)$$

где M – текущая точка дуги алгебраической кривой 6-го порядка;

M_i – точки – узлы интерполяции;

$$p_1 = \bar{t}^6 - 8,7\bar{t}^5t + 22,7\bar{t}^4t^2 - 22,7\bar{t}^3t^3 + 8,7\bar{t}^2t^4 - \bar{t}t^5;$$

$$p_2 = 36\bar{t}^5 t - 133,2\bar{t}^4 t^2 + 151,2\bar{t}^3 t^3 - 61,2\bar{t}^2 t^4 + 7,2\bar{t}t^5;$$

$$p_3 = -45\bar{t}^5 t + 301,5\bar{t}^4 t^2 - 418,5\bar{t}^3 t^3 + 184,5\bar{t}^2 t^4 - 22,5\bar{t}t^5;$$

$$p_4 = 40\bar{t}^5 t - 308\bar{t}^4 t^2 + 600\bar{t}^3 t^3 - 308\bar{t}^2 t^4 + 40\bar{t}t^5;$$

$$p_5 = -22,5\bar{t}^5 t + 184,5\bar{t}^4 t^2 - 418,5\bar{t}^3 t^3 + 301,5\bar{t}^2 t^4 - 45\bar{t}t^5;$$

$$p_6 = 7,2\bar{t}^5 t - 61,2\bar{t}^4 t^2 + 151,2\bar{t}^3 t^3 - 133,2\bar{t}^2 t^4 + 36\bar{t}t^5;$$

$$p_7 = -\bar{t}^5 t + 8,7\bar{t}^4 t^2 - 22,7\bar{t}^3 t^3 + 22,7\bar{t}^2 t^4 - 8,7\bar{t}t^5 + t^6;$$

t – текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до 1.

Далее необходимо перейти от точечного уравнения к системе параметрических уравнений посредством покоординатного расчета [60]:

$$\begin{cases} x = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 + x_5 p_5 + x_6 p_6 + x_7 p_7 \\ w = w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 + w_4 p_4 + w_5 p_5 + w_6 p_6 + w_7 p_7 \end{cases}. \quad (4.16)$$

Учитывая особые свойства алгебраических кривых, проходящих через наперед заданные точки, полученные на основе полиномов Бернштейна [60], первое уравнение системы принимает линейную зависимость в случае равномерного распределения координат узлов интерполяции по оси Ox : $x = td$. Тогда для определения геометрического интерполянта в явном виде достаточно выполнить замену переменных во втором уравнении системы: $t = \frac{x}{d}$, где d – высота уровня жидкости в резервуаре.

Далее необходимо разбить кривую на 7 равных по оси Ox частей и поочередно подставлять в исходное дифференциальное уравнение (4.14) полученные значения x_j , где j изменяется от 0 до 7. Таким образом формируется система линейных алгебраических уравнений с 7-ю неизвестными w_j . После решения СЛАУ полученные значения w_j необходимо подставить во второе уравнение системы (4.16), что и является численным решением дифференциального уравнения (4.14) на интервале изменения переменной x от 0 до d .

Отдельным вопросом является использование граничных условий для уточнения численного решения дифференциального уравнения (4.14). Традиционно граничные условия используются для определения постоянных интегрирования [123]. Но в данном случае в результате получается численное решение, которое соответствует в узловых точках интерполяции исходному дифференциальному уравнению, но это решение является общим и потому полученная кривая находится произвольно в плоскости. Чтобы выполнить граничное условие $w(0) = 0$ необходимо перенести полученную кривую линию в начало координат. Для этого нужно от полученного решения отнять свободный член w_1 аппроксимирующей полиномиальной функции $w = w(x)$.

4.2.3 Исходные данные для проведения вычислительных экспериментов

В качестве примера рассмотрим вертикальный цилиндрический стальной резервуар №1 для хранения бензина объемом 1000 м³ КСП «Бешенский» (Рисунок 4.7).

Исходными данными для моделирования являются геометрические размеры резервуара (радиус резервуара $r = 6,165$ м; толщина оболочки $h = 0,005$ м), высота уровня жидкости в резервуаре ($d = 8,44$ м), физические свойства хранимой жидкости (обычно резервуары испытывают водой, поэтому принимаем плотность воды $\gamma = 1000$ кг/м³) и исходные отклонения стенки резервуара от вертикали δ (Таблица 4.1).

Для определения функций исходных отклонений цилиндрического резервуара от вертикали в опорных точках по окружности резервуара $\delta_i = \delta_i(x)$, где $i = 0, 30, 60, \dots, 330$, воспользуемся инструментом аппроксимации Fit из пакета Statistics системы компьютерной алгебры Maple. Ввод исходных данных был организован с помощью программного пакета MS Excel, в котором были представлены данные из таблицы 4.1, переведенные в метры. Таким образом было получено 12 уравнений характеризующих функции исходных отклонений

цилиндрического резервуара от вертикали в 12 опорных точках по окружности резервуара. В качестве примера приведем одно из уравнений (в точке 0°) с учетом округления полиномиальных коэффициентов:

$$\delta_0 = 4,188 \cdot 10^{-6}x^6 - 0,00017x^5 + 0,0025x^4 - 0,018x^3 + 0,061x^2 - 0,089x.$$

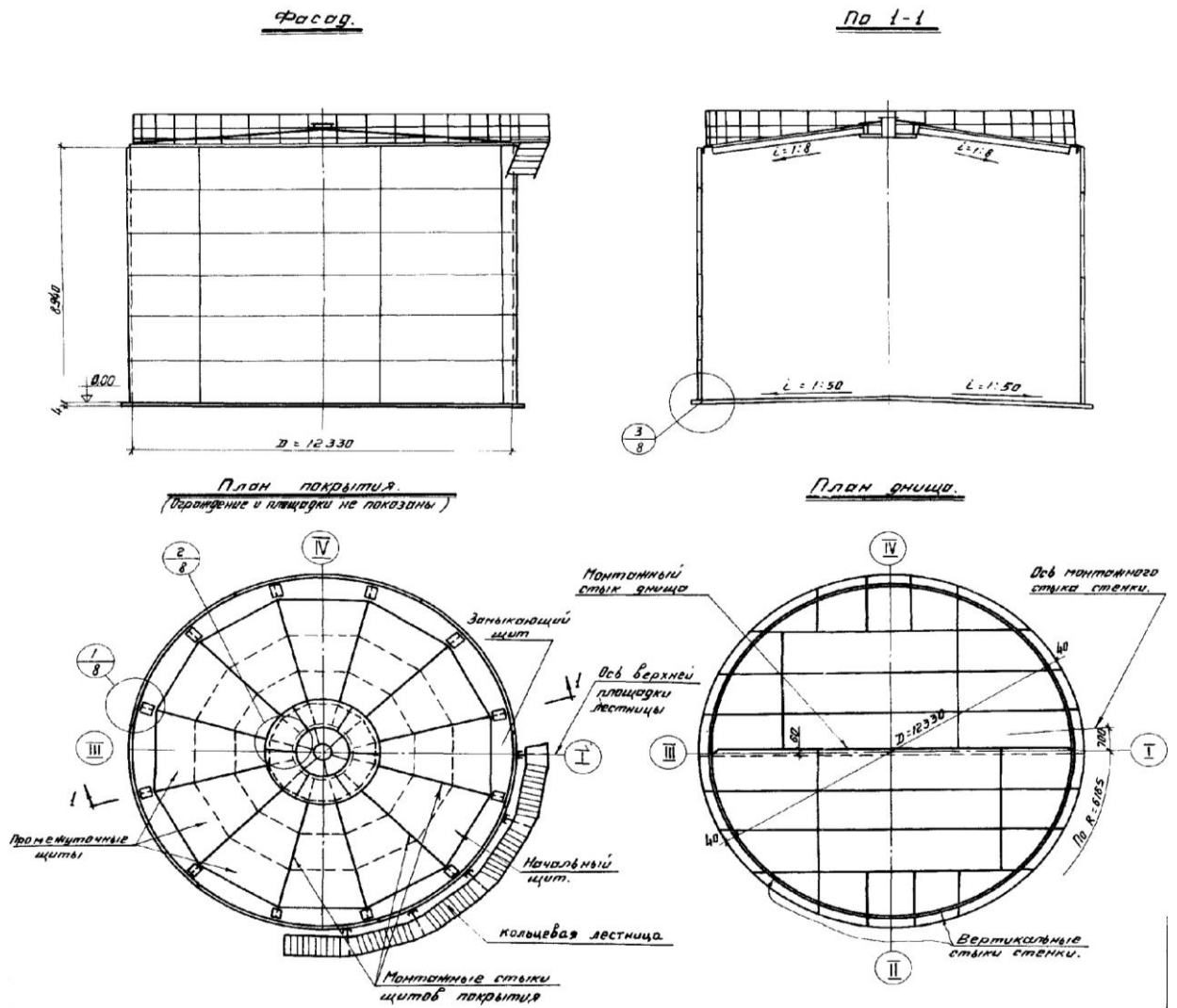


Рисунок 4.7 – Общий вид резервуара объемом 1000 м^3 по ТП 704-1-54

Учитывая, что в процессе аппроксимации количество исходных данных соответствовало степени полинома, коэффициенты детерминации для всех 12-ти линий были получены $\bar{R}^2 = 1$. Т.е. фактически с помощью функции Fit была выполнена интерполяция исходных данных, приведенных в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Исходные отклонения стенки резервуара от вертикали

Высота пояса, мм	Отклонения стенки от вертикали в опорных точках по окружности резервуара, мм											
	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
8940	5,00	0,00	-5,00	-10,00	23,33	56,67	90,00	66,67	43,33	20,00	15,00	10,00
7450	7,00	-1,00	-9,00	-17,00	10,33	37,67	65,00	50,00	35,00	20,00	15,67	11,33
5960	-10,00	-13,33	-16,67	-20,00	10,67	41,33	72,00	61,33	50,67	40,00	23,33	6,67
4470	-20,00	-20,00	-20,00	-20,00	7,67	35,33	63,00	62,00	61,00	60,00	33,33	6,67
2980	-30,00	-23,33	-16,67	-10,00	18,67	47,33	76,00	80,67	85,33	90,00	50,00	10,00
1490	-45,00	-34,67	-24,33	-14,00	9,00	32,00	55,00	66,67	78,33	90,00	45,00	0,00
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Аналогичным образом были получены 12 уравнений характеризующих функции перемещений цилиндрического резервуара от вертикали в 12 опорных точках по окружности резервуара, которые далее были использованы в качестве эталонных кривых для проверки результатов моделирования. В качестве примера приведем эталонное уравнение в точке 0° с учетом округления полиномиальных коэффициентов:

$$\omega_0 = 3,71 \cdot 10^{-6}x^6 - 0,00016x^5 + 0,0024x^4 - 0,017x^3 + 0,06x^2 - 0,089x.$$

4.2.4 Анализ результатов моделирования деформированного состояния эксплуатируемого резервуара для хранения нефтепродуктов

В результате проведения вычислительных экспериментов было получено 12 уравнений характеризующих функции перемещений цилиндрического резервуара от вертикали в 12 опорных точках по окружности резервуара. Для сравнения приведем численное решение дифференциального уравнения (4.14) в точке 0° с учетом округления полиномиальных коэффициентов:

$$w_0 = 4,19 \cdot 10^{-6}x^6 - 0,00017x^5 + 0,0025x^4 - 0,018x^3 + 0,061x^2 - 0,09x. \quad (4.17)$$

Сравнение графических интерпретаций полученного численного решения с эталонным (Рисунок 4.8), показывает, что кривые очень похожи, но находятся на некотором расстоянии друг от друга. На основании этого можно сделать вывод, что решение получено верно, но находится не в том месте. Чтобы их согласовать,

необходимо выполнить начальные условия. В нашем случае это условие – $w(0) = 0$, которое говорит о том, что нужно выполнить параллельный перенос полученной кривой в начало координат. Для этого достаточно вычесть из полученного численного решения свободный член.

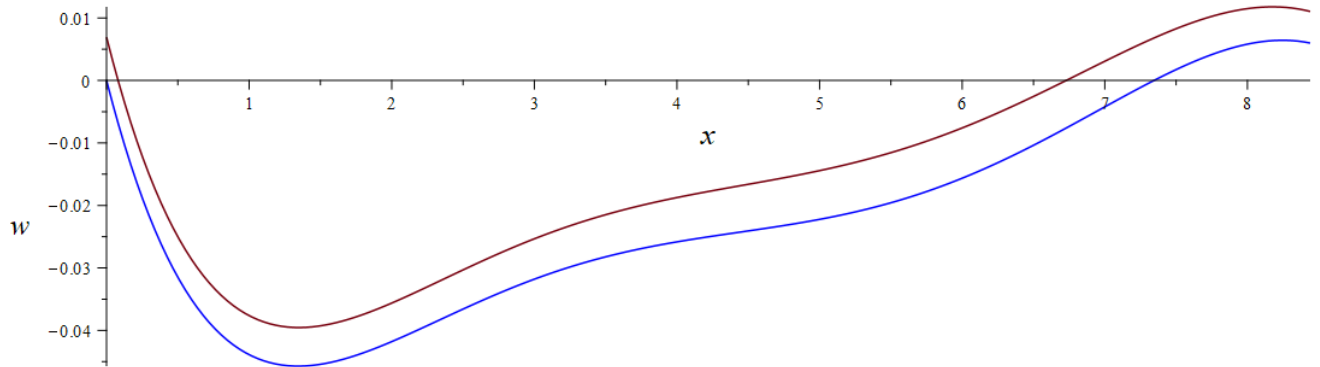


Рисунок 4.8 – Сравнение результатов решения дифференциального уравнения (4.14): синяя линия – эталонное решение; коричневая линия – численное решение

Как видно при сравнении уравнений w_0 и ω_0 , практически все полиномиальные коэффициенты попарно имеют очень близкие значения. Графическая визуализация результатов сравнения также показывает высокий уровень сходства алгебраических кривых (Рисунок 4.9).

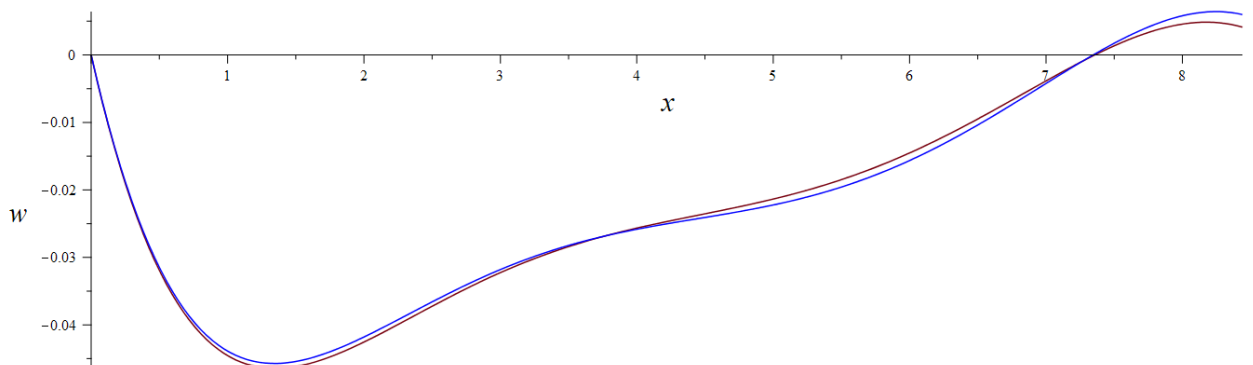


Рисунок 4.9 – Сравнение результатов решения дифференциального уравнения (4.14): синяя линия – эталонное решение; коричневая линия – численное решение

Листинг базовой программы численного решения усовершенствованного ДУ моделирования ДС стального цилиндрического резервуара с несовершенствами приведен в приложении Б.

Воспользуемся методом сравнения многомерных геометрических объектов с помощью коэффициента детерминации \tilde{R}^2 , предложенным в работе [141], для численного определения степени родства эталонного и численного решений. Для этого выделим на обеих кривых 200 пар точек (дискретизируем кривую) с последующим попарным вычислением квадрата регрессионных остатков, общей дисперсии и коэффициента детерминации. Как показали вычислительные эксперименты достаточно точные значения коэффициента детерминации достигаются уже при 100 точках, если же точек более 200, то значения коэффициента детерминации лишь незначительно изменяются в 4 знаке после запятой и их можно считать вполне достоверными. В результате при сравнении алгебраических кривых был достигнут коэффициент детерминации $\tilde{R}^2 = 0,998$. Аналогичное сравнение было проведено для всех 12 опорных точек по окружности резервуара и получены высокие значения коэффициента детерминации, подтверждающие достоверность полученных результатов.

Листинг базовой программы числовой оценки результатов моделирования с помощью коэффициента детерминации приведен в приложении Б.

Отдельного внимания заслуживает поправочный коэффициент k , учитывающий при расчете геометрическую и конструктивную нелинейность [69, 71, 79], а также напряжения, возникающие в верхнем поясе оболочки за счет ее взаимодействия с крышей резервуара. В процессе исследований были получены значения коэффициента k для всех 12 опорных точек по окружности резервуара (Таблица 4.2).

Таблица 4.2 – Значения поправочного коэффициента k по окружности резервуара

φ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
k	0,4	0,4	0,5	0,7	0,9	0,9	0,9	0,8	0,7	0,5	0,4	0,25	0,4

Как видно из таблицы 4.2, изменение значений поправочного коэффициента k по окружности резервуара имеет характер близкий к симметричному, который

позволяет установить зависимость между углом по окружности резервуара и коэффициентом k (Рисунок 4.10).

В результате построения линии тренда в программном пакете MS Excel было получено следующее уравнение с коэффициентом детерминации $\tilde{R}^2 = 0,983$:

$$k = 9,215 \cdot 10^{-10} \varphi^4 - 6,203 \cdot 10^{-7} \varphi^3 + 0,0001 \varphi^2 - 0,0021 \varphi + 0,3888. \quad (4.18)$$

Полученное уравнение может быть использовано для автоматизации процесса численного решения дифференциального уравнения (4.14) с учетом геометрической и конструктивной нелинейности.

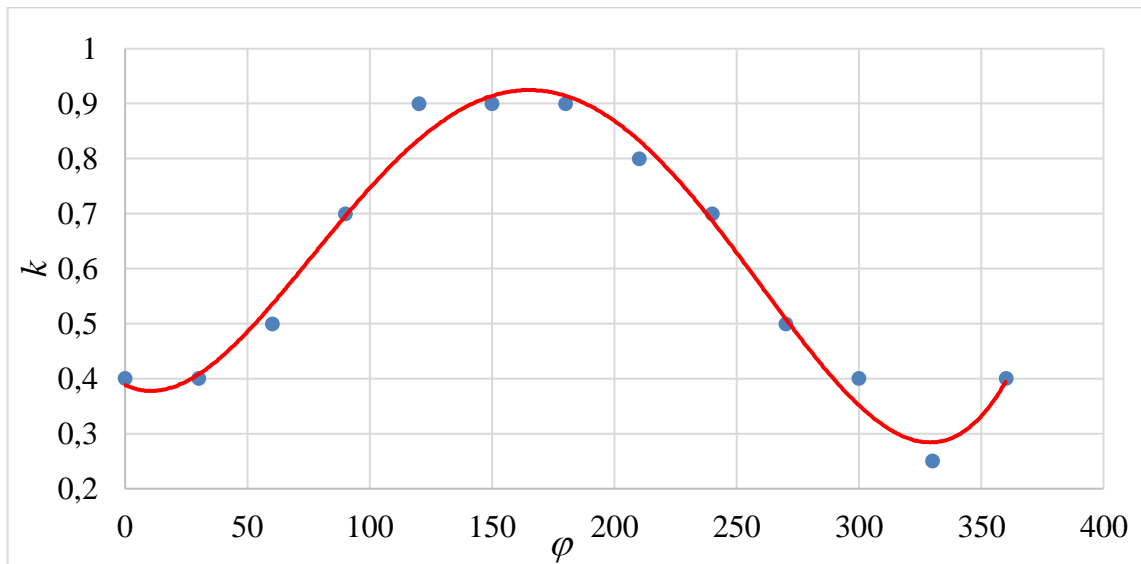


Рисунок 4.10 – Зависимость поправочного коэффициента k от угла φ по окружности резервуара

4.2.5 Определение перемещений стенки цилиндрического резервуара с несовершенствами от действия гидростатической нагрузки с помощью двумерной интерполяции

В процессе оценки технического состояния стальных цилиндрических резервуаров важной задачей является определение мест максимальных перемещений и, соответственно, максимальных напряжений в стенке резервуара. Для решения этой задачи можно воспользоваться методами двумерной

интерполяции с последующим определением экстремальных точек поверхности отклика. Учитывая искажения геометрической формы действительной поверхности цилиндрического резервуара удобно строить поверхность отклика представив резервуар в развернутом виде. Только по оси абсцисс будем откладывать не длину дуги, которая будет постоянно меняться из-за искажений цилиндрической поверхности, а угол φ , который также определяет положение каждой точки на поверхности резервуара. Также по оси ординат будем откладывать высоту резервуара d и по оси аппликат – искомые перемещения стенки резервуара w .

Направляющие линии искомой поверхности отклика определяются как функции перемещений $w_i = w_i(x)$, где $i = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, \dots, 360^\circ$, которые получены в результате численного решения дифференциального уравнения (4.14). Примером такой функции служит уравнение (4.17) в точке 0° . Для удобства нужно перейти от переменной x к параметру v , который изменяется от 0 до 1. Этот переход обеспечивается заменой переменных: $x = v \cdot d$. Например, для перемещений в точке 0° с учетом округления полиномиальных коэффициентов, получим:

$$w_0 = 1,514v^6 - 7,314v^5 + 12,847v^4 - 10,628v^3 + 4,347v^2 - 0,762v.$$

В данном случае аналогичным образом были найдены 12 таких уравнений по окружности резервуара. Поскольку резервуар с несовершенствами представляет замкнутую оболочку, последняя функция перемещений соответствует первой $w_0 = w_{360}$. Вместе с тем необходимое количество направляющих линий может быть увеличено до достижения необходимой точности расчетов.

Учитывая большое количество направляющих линий во избежание незапланированных осцилляций, выполним их интерполяцию с помощью одномерных незамкнутых обводов 1-го порядка гладкости, геометрические алгоритмы построения которых представлены в работах [57, 60, 70].

Исходя из этого получим следующий вычислительный алгоритм для построения образующей поверхности отклика.

1. Определяем координаты исходных точек A_j по оси абсцисс:

$$\varphi_{A_{j+1}} = 360 \frac{j}{n}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

где n – количество направляющих линий поверхности отклика.

2. Определяем длину отрезка $A_j A_{j+1}$:

$$|A_j A_{j+1}| = \sqrt{(\varphi_{A_j} - \varphi_{A_{j+1}})^2 + (w_{A_j} - w_{A_{j+1}})^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где w_{A_j} – уравнения направляющих линий поверхности отклика;

$|A_{j+1} A_{j+2}|$ определяем из этого же пункта сдвигом на единицу.

3. Определяем длину отрезка $A_j A_{j+2}$:

$$|A_j A_{j+2}| = \sqrt{(\varphi_{A_j} - \varphi_{A_{j+2}})^2 + (w_{A_j} - w_{A_{j+2}})^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n-2.$$

4. Определяем координаты точек B_{j+1} , C_{j+1} , формирующих касательные в точках обвода:

$$\begin{cases} \varphi_{B_j} = \left(\varphi_{A_{j+2}} - \varphi_{A_j} \right) \frac{|A_{j+1} A_{j+2}|}{\pi |A_j A_{j+2}|} + \varphi_{A_{j+1}} \\ w_{B_j} = \left(w_{A_{j+2}} - w_{A_j} \right) \frac{|A_{j+1} A_{j+2}|}{\pi |A_j A_{j+2}|} + w_{A_{j+1}} \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_{C_j} = \left(\varphi_{A_j} - \varphi_{A_{j+2}} \right) \frac{|A_j A_{j+1}|}{\pi |A_j A_{j+2}|} + \varphi_{A_{j+1}} \\ w_{C_j} = \left(w_{A_j} - w_{A_{j+2}} \right) \frac{|A_j A_{j+1}|}{\pi |A_j A_{j+2}|} + w_{A_{j+1}} \end{cases},$$

где $j = 1, 2, \dots, n-1$.

5. Определяем дуги обвода для первого и последнего участков:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{A_1} \bar{u}^2 + 2\varphi_{C_1} u \bar{u} + \varphi_{A_2} u^2 \\ d_1 = d \cdot v \\ w_1 = w_{A_1} \bar{u}^2 + 2w_{C_1} u \bar{u} + w_{A_2} u^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi_n = \varphi_{A_n} \bar{u}^2 + 2\varphi_{B_{n-1}} u \bar{u} + \varphi_{A_{n+1}} u^2 \\ d_n = d \cdot v \\ w_n = w_{A_n} \bar{u}^2 + 2w_{B_{n-1}} u \bar{u} + w_{A_{n+1}} u^2 \end{cases},$$

где $\bar{u} = 1 - u$ – дополнение параметра u до 1.

6. Определяем дугу обвода для промежуточных участков:

$$\begin{cases} \varphi_j = \varphi_{A_j} \bar{u}^3 + 3\varphi_{B_{j-1}} \bar{u}^2 u + 3\varphi_{C_j} \bar{u} u^2 + \varphi_{A_{j+1}} u^3 \\ d_j = d \cdot v \\ w_j = w_{A_j} \bar{u}^3 + 3w_{B_{j-1}} \bar{u}^2 u + 3w_{C_j} \bar{u} u^2 + w_{A_{j+1}} u^3 \end{cases}, \quad \text{где } j = 2, 3, \dots, n-1.$$

В результате выполнения приведенного вычислительного алгоритма получим поверхность отклика, характеризующую перемещения в стенке стального цилиндрического резервуара с несовершенствами (Рисунок 4.11).

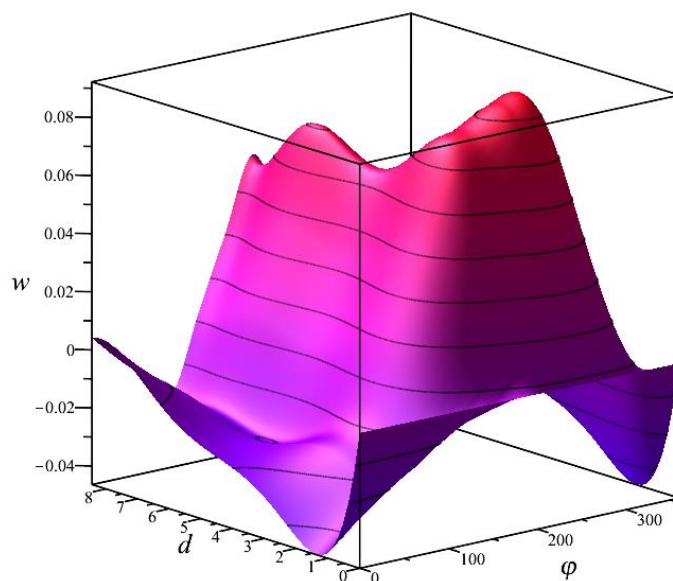


Рисунок 4.11 – Визуализация поверхности отклика перемещений стенки резервуара с несовершенствами от действия гидравлической нагрузки

Как видно из рисунка 4.11, максимальные перемещения возникают в нижней части резервуара на интервале от 150° до 300° по окружности резервуара. Определим методами математического анализа значения максимальных перемещений и точное их положение. Для этого необходимо решить систему двух уравнений с частными производными по параметрам u и v , на интервале их изменения от 0 до 1. Таким образом, максимальные перемещения 92,2 мм возникают на высоте 2,298 м и $258,6^\circ$ по окружности резервуара.

Также можно определить максимальные перемещения стенки резервуара от действия гидростатической нагрузки для каждого пояса по его высоте. Для этого достаточно рассечь полученную поверхность отклика вертикальными плоскостями параллельными оси φ . Аналитически это определяется путем поэтапной фиксации значений высоты каждого пояса резервуара с определением максимальных перемещений на каждом этапе.

Листинг базовой программы построения поверхности отклика, характеризующей перемещения в стенке стального цилиндрического резервуара с несовершенствами, и поиска ее экстремумов приведен в приложении Б.

4.2.6 Методика оценки технического состояния резервуара для хранения нефтепродуктов с учетом несовершенств геометрической формы

В результате проведенных исследований формируется новая инженерная методика оценки технического состояния резервуара для хранения нефтепродуктов с учетом несовершенств геометрической формы от действия гидростатической нагрузки.

1. Техническое задание на обследование резервуара.

Работы по проведению технического диагностирования резервуаров проводятся согласно ряду нормативов на эксплуатацию и ремонт резервуаров, основными из которых являются:

– РД 08-95-95 «Положение о системе технического диагностирования сварных вертикальных цилиндрических резервуаров для нефти и нефтепродуктов» [104];

– «Правила технической эксплуатации резервуаров и инструкции по их ремонту» [102];

– РД 39-0147103-385-87 «Правила технической эксплуатации резервуаров магистральных нефтепроводов» [105];

– СП 70.13330.2012 «Несущие и ограждающие конструкции» (СНиП 3.03.01-87. Актуализированная редакция - регламентирует требования к новым резервуарам) [114];

– СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции» (СНиП II-23-81. Актуализированная редакция - регламентирует требования к проектированию резервуаров) [113].

Согласно [104] для резервуаров, находящихся в эксплуатации в пределах расчетного срока службы, проводится:

– частичное наружное техническое диагностирование не реже 1 раза в 5 лет;

– полное техническое диагностирование не реже 1 раза в 10 лет.

Для резервуара, отработавшего расчетный срок службы, проводится:

– частичное наружное техническое диагностирование не реже 1 раза в 4 года;

– полное техническое диагностирование не реже 1 раза в 8 лет.

Частичное техническое диагностирование проводится с наружной стороны без выведения его из эксплуатации. Полное – проводится с обеих сторон и требует выведения резервуара из эксплуатации, опорожнения, зачистки и дегазации. В [104] разработана структура алгоритма оценки технического состояния резервуаров в различных случаях.

Организация проведения работ по техническому диагностированию возлагается на владельца резервуаров. Он обязан предоставить организации, выполняющей обследование, всю необходимую техническую и технологическую документацию, а также обеспечить свободный доступ ко всем конструктивным элементам резервуара.

Диагностирование и заключение о техническом состоянии и о возможности дальнейшей эксплуатации резервуаров производятся специализированной организацией, имеющей разрешение (лицензию) на проведение таких работ, получаемое в органах Госгортехнадзора России в установленном порядке. Специалисты по техническому диагностированию резервуаров должны быть аттестованы по этому виду работ организацией, имеющей лицензию Госгортехнадзора России. Организация должна располагать необходимыми аппаратурой и средствами, применяемые при техническом диагностировании резервуаров, и не допускается применение аппаратуры, подлежащей госповерке и не прошедшей ее.

При измерении геометрических параметров конструкций и определении толщин листовых конструкций и глубины коррозионных язв должны использоваться стандартные или специальные методы и средства измерения, позволяющие получить точность не менее ± 1 мм.

Организация, выполняющая техническое диагностирование, должна фиксировать результаты работы в соответствующей документации (акты, протоколы, журналы, заключения и т.п.).

Для проведения обследования наружные и внутренние поверхности элементов резервуара, подлежащие техническому диагностированию, должны быть очищены от загрязнений. Качество подготовки поверхностей определяется

требованиями применяемого метода контроля. При проведении полного технического диагностирования теплоизоляция, препятствующая контролю технического состояния, должна быть частично или полностью (в случае необходимости удалена).

2. Определение действительной поверхности стенки резервуара с учетом несовершенств геометрической формы.

Для определения действительной поверхности стенки эксплуатируемого резервуара осуществляется за счет измерения отклонений стенки от вертикали, как традиционными, так и инновационными техническими средствами и инструментами [70]. Например, проведение измерений с помощью наземного лазерного сканера позволяет:

- свести к минимуму нахождение исполнителя внутри резервуара, а иногда и исключить вовсе, опустив сканер с помощью специальных приспособлений в резервуар через верхнюю смотровую горловину;
- обеспечить несопоставимо с традиционными методами высокую скорость и точность измерений, а также детализацию конечного результата;
- учитывать точное расположение и геометрические параметры внутренних элементов резервуара (ребер жесткости, лестниц, переборок, труб и паропроводов);
- исключить человеческий фактор и субъективный подход к выбору точки замеров.

С другой стороны, использование наземного лазерного сканера приводит к необходимости использования трудоемких алгоритмов обработки гиперколичественного множества точек.

Измерения целесообразно проводить дважды: на заполненном и пустом резервуаре в целях определения мест наибольших деформаций и выявления деформированного состояния стенки под нагрузкой. При этом необходимо обращать особое внимание на местные выпучины и вмятины и проводить в этих местах дополнительные измерения. При проведении измерений в заполненном резервуаре для дальнейшей верификации модели действительной поверхности

резервуара необходимо зафиксировать разницу отклонений стенки резервуара от образующих при пустом и заполненном резервуарах.

3. Анализ исходных данных и построение действительной поверхности цилиндрического резервуара с несовершенствами.

В зависимости от способа получения исходных данных, к которым относится массив значений отклонений стенки резервуара от вертикали возможные различные вариации. Если количество исходных данных является достаточным для обеспечения требуемой точности решения, то можно переходить к следующему пункту методики. Вместе с тем, возможна ситуация, при которой количество исходных отклонений по окружности резервуара является недостаточной для проведения качественного анализа деформированного состояния резервуара. В этом случае необходимо выполнить предварительную интерполяцию поверхности резервуара с последующим определением промежуточных значений исходных отклонений по высоте и окружности резервуара. Эта задача успешно решена с помощью двумерных обводов первого порядка гладкости в работе [70]. В случае использования инновационных технологий для измерения отклонений стенки резервуара от вертикали результатом дополнительной обработки может служить уже интерполированная поверхность резервуара, которую также можно использовать для формирования исходного для дальнейшего расчета массива отклонений.

4. Составление и решение массива дифференциальных уравнений.

Вся поверхность резервуара разбивается на n частей по окружности основания резервуара, формируя тем самым n сечений параллельных вертикальной оси резервуара. Для каждого сечения формируется линия исходных отклонений стенки резервуара от вертикали $\delta_j = \delta_j(x)$, где j изменяется от 1 до n . Далее составляется массив дифференциальных уравнений, аналогичных уравнению (4.14):

$$D \frac{d^4 w_j}{dx^4} + \frac{k_j E h (w_j + \delta_j)}{r^2 \left(1 - \frac{\alpha \mu}{2}\right)} = \gamma g (x - d).$$

Поправочный коэффициент k_j вычисляется с помощью соотношения (4.18).

Решив поочередно массив дифференциальных уравнений численным методом с помощью однопараметрических геометрических интерполянтов, которые описываются полиномами 6-го порядка, получим массив перемещений $w_j = w_j(x)$.

5. Построение поверхности отклика и определение ее экстремумов.

Дальнейший этап методики оценки технического состояния цилиндрического резервуара с несовершенствами предусматривает интерполяцию полученного массива перемещений с помощью одномерных обводов первого порядка гладкости для построения составной поверхности отклика и определения ее экстремумов, как описано выше.

6. Разработка технических рекомендаций о возможности дальнейшей эксплуатации резервуара.

Последний этап предусматривает анализ и оценку результатов численных исследований, а также рекомендации о возможности дальнейшей эксплуатации резервуара или необходимости усовершенствования его конструкции. Также существует возможность прогнозирования поведения деформированного состояния резервуара в случае использования рекомендаций по усилению резервуара.

4.3 Выводы по разделу 4

1. Выполнена аппроксимация численного решения дифференциального уравнения методами геометрического моделирования на примере расчета деформированного состояния резервуара для хранения нефтепродуктов со стенками постоянной толщины, которые подвергаются действию внутреннего давления жидкости. Сравнение полученных результатов с эталонным решением демонстрирует высокую степень достоверности предложенного метода. При этом для выполнения инженерных расчетов использование полиномиальных функций

является более предпочтительным.

2. Усовершенствовано дифференциальное уравнение моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы, включая разработку нового способа учета начальных условий. При этом существует возможность моделирования других видов нагрузок (например, ветровая нагрузка, снеговая нагрузка, нагрузка от собственного веса конструкции и т.п.) с применением интерполяционных и аппроксимационных методов, что позволяет избежать необходимости проведения дорогостоящих натурных экспериментов, которые в некоторых случаях не просто не рентабельны, а и невозможны. Особенностью предложенного способа является то, что модель с помощью интерполяционных и аппроксимационных методов достаточно просто описывается дифференциальным уравнением 4-го порядка, которое имеет простое численное решение в виде полинома 6-й степени. При этом отсутствует необходимость выполнять долгие и сложные расчеты по моделированию тонкостенных оболочек с учетом как геометрической, так и конструктивной нелинейности.

3. Предложена методика определения деформированного состояния резервуара для хранения нефтепродуктов с несовершенствами на основе перемещений. При необходимости достаточно просто можно перейти к напряжениям. Для этого стоит полученные перемещения умножить на частное от деления модуля Юнга на радиус резервуара. Но поскольку вследствие несовершенств геометрической формы радиус меняется по высоте резервуара, при переходе от перемещений к напряжениям необходимо учитывать функции исходных отклонений $\delta_j = \delta_j(x)$. Таким образом, модуль Юнга необходимо делить на $r + \delta_j$.

4. За счёт использования интерполяционных и аппроксимационных методов решения поставленной задачи удалось достичь достаточной для инженерных расчётов точности численного моделирования, повысив их быстродействие. Расчёт

массива, состоящего из 12-ти численных решений дифференциальных уравнений, определяющих 12-ть направляющих линий поверхности отклика, как и построение её образующей с помощью одномерных обводов первого порядка гладкости с учётом визуализации, занимает около 20 секунд даже без распараллеливания вычислительных потоков. При необходимости количество направляющих линий поверхности отклика может быть значительно увеличено для достижения большей точности инженерных расчётов. Вместе с тем предложенный метод легко поддаётся распараллеливанию вычислительных операций, поскольку объединяет в себе потенциал конструктивных методов геометрического моделирования, способных обеспечить распараллеливание геометрических построений по задачам (message passing), и математического аппарата «Точечное исчисление», способного реализовать распараллеливание по данным за счёт покоординатного расчёта (data parallel), что в перспективе позволяет реализовать весь доступный вычислительный потенциал современных многоядерных процессоров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация является законченной научно-исследовательской работой, в которой получено решение актуальной научно-технической задачи, заключающейся в развитии методов многомерной интерполяции и аппроксимации для компьютерного моделирования деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений.

Основные научные результаты и выводы, полученные при выполнении работы, состоят в следующем.

1. Проведен анализ существующих подходов к моделированию НДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений и выделены их недостатки, что подтверждает актуальность выбранной темы исследований и необходимость совершенствования существующих методов компьютерного моделирования с помощью интерполяции и аппроксимации.

2. Предложена классификация численного решения ДУ в зависимости от размерности лапласиана, которая позволяет выбрать для аппроксимации геометрический интерполянт.

3. Разработан базовый вычислительный алгоритм численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов на регулярных и нерегулярных сетях. Его использование по аналогии с изогеометрическим методом, позволяет исключить необходимость согласования геометрической информации в процессе взаимодействия между CAD и FEA системами. Также он легко обобщается как в сторону увеличения переменных, так и в сторону увеличения порядка ДУ. При этом вычислительный алгоритм решения ДУ остается инвариантным по отношению к количеству переменных, увеличивается лишь размерность геометрического интерполянта и количество уравнений по координатного расчета. При увеличении порядка ДУ соответственно увеличивается степень полиномов, описывающих геометрический интерполянт.

4. Разработан способ числовой оценки точности результатов моделирования с помощью многомерных геометрических интерполянтов, который позволяет

получить числовую оценку степени сходства, численного и эталонного решений ДУ. Предложенный способ основан на дискретизации численного и эталонного решений с последующим сравнением точечных множеств с помощью коэффициента детерминации. Указанный способ позволяет использовать другие критерии оценки и может найти широкое применение в научных исследованиях по различным областям науки и техники.

5. Усовершенствовано ДУ моделирования ДС упругой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении для численного анализа ДС цилиндрического резервуара с несовершенствами геометрической формы и получено его численное решение с помощью геометрических интерполянтов. Аналогичным образом можно исследовать и другие конструкции тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учетом несовершенств геометрической формы или без них. Также существует возможность моделирования других видов нагрузок (например, ветровая нагрузка, снеговая нагрузка, нагрузка от собственного веса конструкции и т.п.) с применением интерполяционных и аппроксимационных методов, что позволяет избежать необходимости проведения дорогостоящих натуральных экспериментов, которые в некоторых случаях не просто не рентабельны, а и невозможны.

6. Предложен новый способ учета начальных условий ДУ, который заключается в параллельном переносе численного решения в нужную точку, координаты которой соответствуют начальным условиям. Учитывая его универсальность, такой способ может занять достойное место среди существующих и инновационных методов численного решения ДУ.

7. Усовершенствована методика оценки технического состояния резервуаров для хранения нефтепродуктов с учетом несовершенств геометрической формы путем применения комплекса программ компьютерного моделирования ДС тонкостенных оболочек инженерных сооружений на основе численного решения ДУ с помощью геометрических интерполянтов. Особенностью предложенной методики является то, что модель с помощью интерполяционных и аппроксимационных методов достаточно просто описывается дифференциальным

уравнением 4-го порядка, которое имеет простое численное решение в виде полинома 6-й степени. При этом отсутствует необходимость выполнять долгие и сложные расчеты по моделированию тонкостенных оболочек с учетом как геометрической, так и конструктивной нелинейности.

8. Результаты исследований использованы при оценке НДС танка энергонакопителя в рамках договора №190421 от 19.04.2021 г. по теме: «Обследование танка энергонакопителя варницы №2 и выдача рекомендаций по восстановлению работоспособности танка, выявлению возможных причин аварий, разработка рекомендаций по недопущению подобной ситуации в процессе дальнейшей эксплуатации танка на территории ООО «ДПЗ»» (справка о внедрении №367 от 18.06.2021 г. выдана ООО Фирма «Промстройремонт») и внедрены в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ» (справка №11 от 18.06.2021 г. о внедрении в учебный процесс при проведении лабораторных занятий для подготовки бакалавров по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» при изучении дисциплины «Информационные технологии»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский, Н.П. Конечно-разностные уравнения теории пологих ребристых оболочек / Н.П. Абовский, В.М. Шестопап // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Материалы III конференции по пространственным конструкциям. Апрель 1968г. – Красноярск: КПИ, 1968. – С. 277-289.
2. Абовский, Н.П. О применении метода конечных элементов совместно с другими методами / Н.П. Абовский // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Сб. научных трудов; под ред. Н.П. Абовского. – Вып. VIII. – Красноярск: КПИ, 1975. – С.215.
3. Абовский, Н.П. Обобщенные вариационно-разностные уравнения теории неоднородных анизотропных (в том числе ребристых) пологих оболочек / Н.П. Абовский, Н. П. Андреев, Р. А. Сабиров // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Межвузовский сб. научных трудов. – Вып. VII. – Красноярск: КПИ, 1974. – С. 36-54.
4. Абовский, Н.П. Основные уравнения метода сеток для ребристых оболочек / Н.П. Абовский // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Материалы II конференции по пространственным конструкциям. 12-16 декабря 1966г. – Красноярск: КПИ, 1966. – С. 150-167.
5. Абовский, Н.П. Расчет пологих оболочек в матричной форме методом сеток: учебно-методическое пособие / Н.П. Абовский, И.И. Самольянов, Д.А. Пасько. – Красноярск: КПИ, 1965. – 41 с.
6. Абовский, Н.П. Расчет пологих оболочек типа гиперболического параболоида методом сеток / Н.П. Абовский, И. И. Самольянов // Пространственные конструкции в Красноярском крае: Материалы II конференции по пространственным конструкциям. 12-16 декабря 1966г. – Красноярск: КПИ, 1966. – С. 207-250.
7. Абовский, Н.П. Ребристые оболочки: учебное пособие / Н.П. Абовский, Красноярск: КПИ, 1967. – 64 с.

8. Абрамов, Г.Д. Исследование устойчивости и сложного изгиба пластин, стержневых наборов и оболочек разностными уравнениями / Г.Д. Абрамов. – Л.: Судпромгиз, 1951. – 52 с.
9. Араманович, И.Г. Уравнения математической физики / И.Г. Араманович, В.И. Левин. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
10. Бабенко, К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2002. – 848 с.
11. Бабич, В.М. Линейные уравнения математической физики / В.М. Бабич, М.Б. Капилевич, С.Г. Михлин и др. – М.: Наука, 1964. – 368 с.
12. Балюба, И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – Макеевка, 1995. – 227 с.
13. Балюба, И.Г. Точечное исчисление: учебное пособие / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. В.М. Верещаги. – Мелитополь: МГПУ им. Б. Хмельницкого, 2015. – 236 с.
14. Балюба, И.Г. Точечное исчисление: учебно-методическое пособие / И.Г. Балюба, Е.В. Конопацкий, А.И. Бумага. – Макеевка: ДОННАСА, 2020. – 244 с.
15. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате. – М.: Стройиздат, 1982.– 448 с.
16. Безухов, Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
17. Белый, М. В. Полуитерационный многосеточный метод и его программная реализация для решения пространственных краевых задач / М.В. Белый, В.Е. Булгаков, А.Б. Золотов // ЖВМ и МФ. – 1987. – Т. 27. – № 6. – С. 875 – 888.
18. Березовский, Л.Ф. К вопросу о расчете тонкостенных пологих оболочек / Л.Ф. Березовский // Инженерно-физический журнал. – 1960. – Т. 3. – № 5. – С. 111-115.

19. Болотин, В.В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек / В.В. Болотин // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27. – Вып. 2. – с. 362-369.
20. Бумага, А.И. Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05, 05.01.01. / А.И. Бумага. – Макеевка, 2016. – 164 с.
21. Варвак П.М. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.
22. Василевский, Ю. В. Две схемы расщепления для нестационарной задачи конвекции-диффузии на тетраэдральных сетках / Ю.В. Василевский, И.В. Капырин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 8. – С. 1429-1447.
23. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
24. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 497 с.
25. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
26. Власов, В.З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек / В.З. Власов // Прикладная математика и механика. – 1944. – Т. 8. – Вып. 2. – С.109-140.
27. Ворович, И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
28. Ворович, И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
29. Галанин, М.П. К обоснованию метода конечных суперэлементов / М.П. Галанин, Е.Б. Савенков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 5. – С. 713-729.
30. Галимов, К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З. Галимов. – Казань: Изд. Казан. гос. ун-та, 1975. – 326 с.

31. Галимов, К.З. К вариационным методам нелинейной теории пологих оболочек / К.З. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – Вып. 5. – С. 348-362.
32. Галимов, К.З. К формулировке граничных условий теории пологих оболочек с учетом поперечных сдвигов / К.З. Галимов // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1979. – Вып. 14. – С. 208-216.
33. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы: пер. с англ. / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
34. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд. – М.: Наука, 2018. – 376 с.
35. Геометрическое моделирование адаптивных алгебраических кривых, проходящих через наперёд заданные точки / Е.В. Конопацкий, И.В. Селезнев, О.А. Чернышева, М.В. Лагунова, А.А. Бездитный // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2021. – Т. 18. – № 9. – С. 26-34. – DOI: 10.14489/vkit.2021.09.pp.026-034.
36. Гольденвейзер, А.А. Теория упругих тонких оболочек / А.А. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
37. Горшков, А.Г. Сопротивление материалов: учебное пособие / А.Г. Горшков, В.Н. Трошин, В.И. Шалашилин. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
38. Даревский, В.М. Контактные задачи теории оболочек / В.М. Даревский // Труды VI Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966. – С. 540-551.
39. Даревский, В.М. Оболочки под действием локальных нагрузок / В.М. Даревский // Прочность. Устойчивость. Колебания: в 3 т./ под общ. ред. И.А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.2. – С. 49-96.
40. Даревский, В.М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках / В.М. Даревский // Прочность и динамика авиационных двигателей. – М.: Машиностроение, 1964. – Вып. 1.– С. 23-83.

41. Даревский, В.М. Основы теории оболочек / В.М. Даревский // Тр. Центр ин-та авиац. моторостр. – 1998. – № 1309. – С. 3-193.
42. Деклу, Ж. Метод конечных элементов / Ж. Деклу. – М.: Мир, 1976. – 96 с.
43. Длугач, М.И. К построению систем конечно-разностных уравнений для расчета пластин и оболочек / М.И. Длугач // Прикладная механика. – 1974. – Т. 8. – №1. – С. 99-103.
44. Егоров, Е. А. Комплексный анализ, оценка и управление надежностью стальных резервуаров для хранения нефтепродуктов: дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / Е.А. Егоров; Приднепровская гос. академия строительства и архитектуры. – Д., 2004. – 337 с.
45. Егоров, Е.А. Проблемы устойчивости стальных вертикальных цилиндрических резервуаров в задачах технической диагностики / Е.А. Егоров, Б.Г. Исмагулов, Ю.В. Федоряка // Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури. – 2010. – № 11(152). – С. 19-28.
46. Задача с решением по уравнению с математической физики. Уравнение Лапласа в прямоугольнике. Точка доступа: https://www.matburo.ru/Examples/Files/umf_6.pdf (дата обращения: 08.03.2021).
47. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
48. Золотов, А.Б. Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций) / А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М. Л. Мозгалева. – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
49. Золотов, А.Б. Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / А.Б. Золотов. – М., 1989. – 284 с.
50. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация): учебное пособие для вузов / Н.П. Абовский, Л.В. Енджиевский, В.И. Савченков и др. – М.: Стройиздат, 1978. – 189 с.

51. Изо-геометрический метод расчета как альтернатива стандартному методу конечных элементов / А.И. Исрафилова, В. Кутрунов, М. Гарсия, М. Калиске // Строительство уникальных зданий и сооружений, 2019. – № 9(84). – С. 7-21. – DOI: 10.18720/CUBS.84.1.

52. Калиткин, Н.Н. Численные методы: учебное пособие / Н.Н. Калиткин. – 2-е изд., испр. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

53. Капырин, И.В. Семейство монотонных методов численного решения трёхмерных задач диффузии на неструктурированных тетраэдральных сетках / И.В. Капырин // Доклады Академии Наук. – 2007. – Т. 614. – № 5. – С. 588-593.

54. Ковеня, В.М. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики: учебное пособие / В.М. Ковеня, Д.В. Чирков. – Новосибирск. – 2013. – 87 с.

55. Конопацкий, Е. В. Геометрический смысл метода наименьших квадратов / Е. В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2019. – № 9(183). – С. 11-18. – DOI 10.14489/vkit.2019.09.pp.011-018.

56. Конопацкий, Е. В. Моделирование дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки / Е. В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2019. – № 2(176). – С. 30-36. – DOI 10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036.

57. Конопацкий, Е.В. Вычислительные алгоритмы моделирования одномерных обводов через k наперед заданных точек / Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, А.И. Бумага // Геометрия и графика. – М.: Инфра-М, 2018. – №3. – С.20-32. – DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491.72807735.

58. Конопацкий, Е.В. Геометрическая теория многомерной интерполяции / Е.В. Конопацкий. – Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. – Брянск: БГТУ, 2020. – № 1(07). – С. 9-16. – DOI: 10.30987/2658-6436-2020-1-9-16.

59. Конопацкий, Е.В. Геометрическое моделирование и оптимизация многофакторных процессов методом многомерной интерполяции: тр. Междунар.

науч. конф. по физико-техн. информатике СРТ2018. 28–31 мая 2018 г. – Москва-Протвино, 2018. С. 299-306.

60. Конопацкий, Е.В. Геометрическое моделирование многофакторных процессов на основе точечного исчисления: дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / Е.В. Конопацкий. – Нижний Новгород, 2020. – 307 с.

61. Конопацкий, Е.В. Использование геометрических интерполянтов для численного решения дифференциальных уравнений / Е.В. Конопацкий, О.А. Шевчук // Информационные технологии: материалы 84-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 3-15 февраля 2020 года. – Минск: БГТУ, 2020. – С.194-196.

62. Конопацкий, Е.В. Моделирование аппроксимирующего 16-точечного отсека поверхности отклика, применительно к решению неоднородного уравнения теплопроводности / Е.В. Конопацкий // Геометрия и графика. – М.: Инфра-М, 2019. – Т.7. – №2. – С.38-45. – DOI: 10.12737/article_5d2c1a551a22c5.12136357.

63. Конопацкий, Е.В. Моделирование дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки / Е.В. Конопацкий // Вестник компьютерных и информационных технологий. – 2019. – № 2. – С. 30-36. – DOI: 10.14489/vkit.2019.02.pp.030-036.

64. Конопацкий, Е.В. Общий подход к полилинейным интерполяции и аппроксимации на основе линейчатых многообразий / Е.В. Конопацкий, С.И. Ротков, А.А. Крысько // Строительство и техногенная безопасность. – Симферополь: ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского», 2019. – № 15(67). – С.159-168.

65. Конопацкий, Е.В. Подход к построению геометрических моделей многофакторных процессов многомерной интерполяции / Е.В. Конопацкий // Программная инженерия. – М.: 2019. – Т.10. – № 2. – С. 77-86.

66. Конопацкий, Е.В. Принципы моделирования многофакторных процессов с большим количеством исходных данных / Е.В. Конопацкий //

Информационные технологии в проектировании и производстве. – М.: НТЦ «Компас», 2018. – № 4(172). – С.20-25.

67. Конопацкий, Е.В. Принципы построения компьютерных моделей многофакторных процессов методом многомерной интерполяции / Е.В. Конопацкий // Сборник материалов II Международной научно-практической конференции: «Программная инженерия: методы и технологии разработки информационно-вычислительных систем (ПИИВС-2018)» (14-15 ноября 2018 г.). – Донецк: ДонНТУ, 2018. – С. 277-287.

68. Конопацкий, Е.В. Решение дифференциальных уравнений методами геометрического моделирования / Е.В. Конопацкий // Труды 28-й Международной конференция по компьютерной графике и машинному зрению «GraphiCon 2018». 24-27 сентября 2018 г. – Томск: ТПУ, 2018. – С. 322-325.

69. Крысько, А.А. Анализ напряженно-деформированного состояния стенки резервуара с геометрическими несовершенствами при действии гидростатической нагрузки / А.А. Крысько // Металлические конструкции. – 2017. – Т. 23. – № 3. – С. 97-106.

70. Крысько, А.А. Геометрическое и компьютерное моделирование эксплуатируемых конструкций тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учётом несовершенств геометрической формы: дис. ... канд. техн. наук.: 05.23.01 и 05.01.01 / А.А. Крысько. – Макеевка, 2016. – 191 с.

71. Крысько, А.А. Численные исследования местных несовершенств геометрической формы вертикального цилиндрического резервуара / А.А. Крысько // Строитель Донбасса. – 2020. – № 1(10). – С. 13-17.

72. Лебедев, А. В. Численные методы расчета строительных конструкций: учеб. пособие / А. В. Лебедев; СПбГАСУ. – СПб., 2012. – 55 с.

73. Лессиг, Е.Н. Листовые металлические конструкции / Е.Н. Лессиг, А.Ф. Лилеев, А.Г. Соколов. – М.: Стройиздат, 1970. – 488 с.

74. Лоханский, Я.К. Основы вычислительной гидромеханики и теплообмена: учебное пособие / Я.К. Лоханский. – М.: Изд-во МГИУ, 2008. – 75 с.

75. Маркус, Г. Теория упругой сетки и ее приложение к расчету плит и безбалочных перекрытий / Г. Маркус; пер. с нем. Д.В. Вайнберг, Л.С. Ямпольский. – Киев; Харьков: ОНТИ НКТП, Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. – 442 с.

76. Масленникова, В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.Н. Масленникова. – М. : Изд-во РУДН, 1997. – 447 с.

77. Меркулова, Н.Н. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.Н. Меркулова, М.Д. Михайлов. – Томск: ТГУ, 2004. – 122 с.

78. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / В.А. Постнов, С. А. Дмитриев, Б.К. Елтышев, А.А. Радионов. Под общ. ред. В.А. Постнова. – Л.: Судостроение, 1979. – 288 с.

79. Методика численного исследования напряжённо-деформированного состояния стальных вертикальных цилиндрических резервуаров с учётом несовершенств геометрической формы / А.А. Крысько, Е.В. Конопацкий, А.Н. Миронов, В.Ф. Муштанов // Металлические конструкции. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С. 45-57.

80. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. М., 1970. – 512 с.

81. Многомерная теоретико-числовая Фурье интерполяция // Н.М. Добровольский, А.Р. Есаян, О.В. Андреева, Н.В. Зайцева. – Чебышевский сборник, 2004. – Т.5. – Вып. 1. – С.122-143.

82. Муштари, Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия / Х.М. Муштари // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. – 1938. – Т. 9. – С. 71-150.

83. Муштари, Х.М. Об устойчивости круглой тонкой цилиндрической оболочки при кручении / Х.М. Муштари // Тр. Казан. авиац. ин-та. – 1934. – № 2. – С. 3-17.

84. Муштари, Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 351 с.

85. Муштари, Х.М. О применимости различных теорий трехслойных пластин и оболочек / Х.М. Муштари // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1960. – №6. – С. 163-165.
86. Муштари, Х.М. Об области применения приближенных теорий трехслойных пластин несимметричного строения с заполнителем / Х.М. Муштари // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – №5. – С. 176-178.
87. Муштари, Х.М. Об одном уточнении приближенной теории трехслойных пластин с заполнителем / Х.М. Муштари // Тр. Всесозн. конф. по теории пластин и оболочек. – Киев, 1962. – С. 128-131.
88. Муштари, Х.М. Основные зависимости теории упругих трехслойных оболочек переменной жесткости / Х.М. Муштари // Механика твердого тела. – 1996. – №2. – С. 145-149.
89. Назаров, А.А. К теории тонких пологих оболочек / А.А. Назаров // Прикладная математика и механика. – 1949. – т. 13. – Вып. 5.
90. Назаров, А.А. Основы теории и методы расчета пологих оболочек / А.А. Назаров. – М.: Стройиздат, 1966. – 302 с.
91. Найдыш, В.М. Алгебра Точечного исчисления / В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка: Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2012. – Вип. 90. – С. 210-215.
92. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – М.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
93. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судостроение, 1962. – 431 с.
94. Об одном направлении в конструировании разностных схем / В.Т. Жуков, Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко, О.Б. Феодоритова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42. – №2. – С. 223-235.

95. Оганесян, Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец. – Ереван: Издательство АН Армянской ССР, 1979. – 235 с.

96. Оден, Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред: пер. с англ. / Дж. Оден. – М.: 1976. – 464 с.

97. Ортега, Дж. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений: пер. с англ. / Дж. Ортега, У. Пул; под ред. А.А. Абрамова. – М.: Наука, 1986. – 288 с.

98. Пахнutow, И.А. Многомерная интерполяция / И.А. Пахнutow // Интерактивная наука. – 2017. – №15. – Точка доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/mnogomernaya-interpolyatsiya> (дата обращения: 26.08.2018).

99. Писанко, Н.М. Комплексное решение вопроса о допусках при изготовлении сварных вертикальных цилиндрических резервуаров / Н.М. Писанко // Стальные конструкции. – 1962. – № 18. – С. 57-82.

100. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для ВТУЗов: учебное пособие в двух томах / Н.С. Пискунов. – Изд. 13. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

101. Постнов, В.А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций / В.А. Постнов, И.Я Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

102. Правила технической эксплуатации резервуаров и инструкции по их ремонту: утверждены Госкомнефтепродуктом СССР 26 декабря 1986 г. / Государственный комитет СССР по обеспечению нефтепродуктами. – М.: Недра, 1988. – 182 с.

103. Применение метода конечных суперэлементов для решения задач конвекции-диффузии / В.Т. Жуков, Н.В. Новикова, Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко, О.Б. Феодоритова // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. – № 11. – С. 78-92.

104. РД 05-95-95. Положение о системе технического диагностирования сварных вертикальных цилиндрических резервуаров для нефти и нефтепродуктов. – М.: ВНИИмонтажспецстрой, 1995. – 17 с.
105. РД 39-0147103-385-87. Правила технической эксплуатации резервуаров магистральных нефтепроводов / ВНИИСПТнефть. – Уфа: ВНИИСПТнефть, 1988. – 282 с.
106. Рикардс, Р.Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин / Р.Б. Рикардс. – Рига: Зинатне. – 1988. – 284 с.
107. Розин, Л.А. Расчет гидротехнических сооружений на ЭЦВМ: метод конечных элементов / Л.А. Розин. – М.: Энергия, 1971. – 214 с.
108. Самарский, А.А. Численные методы: учебное пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
109. Сафарян, М.К. Основные положения расчета цилиндрических и сферических оболочек на устойчивость (применительно к резервуаростроению) / М.К. Сафарян // Монтажные работы в строительстве. – 1967. – № 2. – С. 20-33.
110. Сафарян, М.К. Проектирование и сооружение стальных резервуаров / М.К. Сафарян, О.М. Иванов. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 328 с.
111. Смирнов, В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. – Т.2. – 479 с.
112. Смирнов, Е.М. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии / Е.М. Смирнов, Д.К. Зайцев // Научно-технические ведомости. – 2004. – № 2 (36). – С. 70–81.
113. СП 16.13330.2011. Свод правил. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. – Введ. 2011-05-20. – М.: Минрегион России, 2011. – 173 с.
114. СП 70.13330.2012. Несущие и ограждающие конструкции. Актуализированная редакция СНиП 3.03.01-87. – Введ. 2013-01-01. – М.: Минрегион России, 2012. – 205 с.

115. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев; отв. ред. Писаренко Г.С. – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.
116. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Эдиториал УРСС. – Изд. 8, стер. – 2004. – 472 с.
117. Страховская, Л.Г. Об одном варианте метода конечных элементов / Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 950-960.
118. Страховская, Л.Г. Об одном варианте МКСЭ для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости / Л.Г. Страховская // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49. – № 1. – С. 123-136.
119. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
120. Тарасенко, А.А. Напряженно-деформированное состояние крупногабаритных резервуаров при ремонтных работах: 05.15.13: дисс. ... канд. техн. наук / А.А. Тарасенко; ТИИ. – Тюмень, 1991. – 253 с.
121. Тарасенко, А.А. Разработка научных основ методов ремонта вертикальных стальных резервуаров: 05.15.13: дисс. ... док. техн. наук / А.А. Тарасенко; ТюмГНГУ. – Тюмень, 1999. – 299 с.
122. Тимошенко, С. П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – М.: Гостехтеориздат, 1955. – 568 с.
123. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
124. Тимошенко, С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
125. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
126. Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теории и задачи / С.И. Трушин. – М.: АСВ, 2008. – 256 с.

127. Тюрин, Д.В. Моделирование вертикальных стальных резервуаров с несовершенствами геометрической формы: дис. ... канд. техн. наук : 25.00.19 / Тюрин Д. В.; ТГНУ. – Тюмень, 2003. – 230 с.

128. Уравнения в частных производных математической физики: учебное пособие для мех.-мат. фак. ун-тов / Кошляков Н. С. и др. – М.: «Высшая школа», 1970. – 712 с.

129. Уравнения математической физики: Сборник примеров и упражнений / Сост. А.А. Рогов, Е.Е. Семенова, В.И. Чернецкий, Л.В. Щеголева. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. – 220 с.

130. Федоренко, Р.П. О некоторых задачах и приближенных методах вычислительной механики / Р.П. Федоренко // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т.34. – № 2. – с.267-289.

131. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3-х томах / Г.М. Фихтенгольц. – Санкт-Петербург, 2017. – Том 1. – 608 с.

132. Чепур, П.В. Напряженно-деформированное состояние резервуара при развитии неравномерных осадок его основания: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.19 / П.В. Чепур. – Москва, 2015. – 181 с.

133. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций / А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

134. Чупров, И.Ф. Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа: учебное пособие / И.Ф. Чупров, Е.А. Канева, А.А.Мордвинов. – Ухта: УГТУ, 2004. – 128 с.

135. Шевчук, О.А. Решение дифференциальных уравнений с помощью геометрических интерполянтов / О.А. Шевчук, Е.В. Конопацкий // Информационные технологии в проектировании и производстве. – М.: НТЦ «Компас», 2020. – № 3. – С.29-33.

136. Шустов, В.В. Многомерная интерполяция сеточной вектор-функции / В.В. Шустов // Чита: Издательство Молодой учёный, 2010. – №8(19)/2010. – Т.1. – С.17-20.
137. Бумага, А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку / А.І. Бумага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. – К.: КНУБА, 2012. – Вып.90. – С. 49-52.
138. Конопацький, Є.В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша. Дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Є.В. Конопацький. – Мелітополь, 2012. – 164 с.
139. A NURBS-based inverse analysis for reconstruction of nonlinear deformations of thin shell structures / N. Vu-Bac, T.X. Duong, T. Lahmer, X. Zhuang, R.A. Sauer, H.S. Park, T. Rabczuk // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. – Vol. 331. – pp. 427-455. – DOI: 10.1016/j.cma.2017.09.034.
140. Aleshina, O.O. Stress state analysis of an equal slope shell under uniformly distributed tangential load by different methods/ O.O. Aleshina, V.N. Ivanov, D. Cajamarca-Zuniga // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2021. – Vol. 17. – No. 1. – pp. 51-62. – DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-1-51-62.
141. An approach to comparing multidimensional geometric objects / I.V. Seleznev, E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezditnyi // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021) Nizhny Novgorod, Russia, September 27-30, 2021. – Vol. 3027. – pp. 682-688. – DOI: 10.20948/graphicon-2021-3027-682-688. – Access mode: <http://ceur-ws.org/Vol-3027/paper71.pdf>.
142. An efficient isogeometric solid-shell formulation for geometrically nonlinear analysis of elastic shells / L. Leonetti, F. Liguori, D. Magisano, G. Garcea // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2018. – Vol. 331. – pp. 159-183. – DOI: 10.1016/j.cma.2017.11.025.
143. Behaviour of vertical cylindrical tank with local wall imperfections / A. Šapalas, G. Šaučiuvėnas, K. Rasiulis, M. Griškevičius, T. Gečys // Journal of Civil

Engineering and Management, 2019. – Vol. 25(3). – pp. 287-296. – DOI:10.3846/jcem.2019.9629.

144. Belostotsky, A.M. Universal Software System "STADYO" for the Numerical Solution of Linear and Nonlinear Problems of the Field Theory, Statics, Stability and Dynamics of Spatial Combined Systems: General Parameters and Superelemental Features / A.M. Belostotsky, A.L. Potapenko, P.A. Akimov // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. – Vol. 14. – No. 3. – pp. 26-41.

145. Cottrell, J. Austin, Hughes, Thomas J. R, Bazilevs, Y. Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA, Wiley, 2009 <http://as.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-0470748737.html>

146. Enright, D. A hybrid particle level set method for improved interface capturing / D. Enright, R. Fedkiw, J. Ferziger, I. Mitchell // J. Comp. Phys. – 2002. – Vol. 183. – pp. 83-116.

147. Fedorenko, R.P. Finite Superelements Method and Multigrid Method in Problems of Elasticity Theory. Corp. Fluid Dynamics Journal, 1996. – v.5. – №2. – pp.203-212.

148. Ferziger Joel H., Peri'c Milovan. Computational Methods for Fluid Dynamics. — Springer Science + Business Media, 2002. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56026-2>.

149. Gorban, N.N. Accounting actual geometric shape of the tank shell when evaluating its fatigue life / N.N. Gorban, G.G. Vasiliev, A.P. Salnikov // Neftyanoe Khozyaystvo – Oil Industry, 2018. – No. 8. – pp. 75-79. – DOI:10.24887/0028-2448-2018-8-75-79.

150. Gross, S. A finite element based level set method for two-phase incompressible flows / S. Gross, V. Reichelt, A. Reusken // Computing and Visualization in Science. – 2006. – Vol. 9. – No. 4. – pp. 239-257.

151. Hughes, P.J. Nonlinear interface reduction for time-domain analysis of Hurty/Craig-bampton superelements with frictional contact / P.J. Hughes, R.J. Kuether // Journal of Sound and Vibration, 2021. – Vol. 507. – DOI: 10.1016/j.jsv.2021.116154.

152. Isogeometric analysis of large-deformation thin shells using RHT-splines for multiple-patch coupling / N. Nguyen-Thanh, K. Zhou, X. Zhuang, P. Areias, H. Nguyen-Xuan, Y. Bazilevs, T. Rabczuk // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017. – Vol. 316. – pp. 1157-1178. – DOI: 10.1016/j.cma.2016.12.002.

153. Konopatskiy, E.V. About one method of numeral decision of differential equalizations in partials using geometric interpolants / E.V. Konopatskiy, O.S. Voronova, O.A. Shevchuk, A.A. Bezdityni // *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. – Vol. 2763. – pp. 213-219. – DOI: 10.30987/conferencearticle_5fce27708eb353.92843700.

154. Konopatskiy, E.V. Application of mixed geometric interpolants for modeling the strength characteristics of steel fiber concrete / E.V. Konopatskiy, A.A. Bezdityni // *IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series* 1546 (2020) 012037. – DOI: 10.1088/1742-6596/1546/1/012037.

155. Konopatskiy, E.V. Geometric approach to finding the best possible solutions based on composition optimization of the mixed aggregate of fine-grained concrete / E.V. Konopatskiy, A.I. Bumaga, A.A. Bezdityni // *IoP conference series: Materials Science and Engineering: Conf. Series* 962 (2020) 032031. – DOI: 10.1088/1757-899X/962/3/032031.

156. Konopatskiy, E.V. Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method / E.V. Konopatskiy, A.A. Bezdityni // *IoP conference series: Journal of Physics: Conf. Series* 1441 (2020) 012063. – DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.

157. Konopatskiy, E.V. Modeling geometric varieties with given differential characteristics and its application / E.V. Konopatskiy, A.A. Bezdityni, O.A. Shevchuk // *CEUR Workshop Proceedings*, 2020. – Vol. 2744. – DOI: 10.51130/graphicon-2020-2-4-31.

158. Konopatskiy, E.V. Solving differential equations by geometric modelling methods / E.V. Konopatskiy // *GraphiCon 2018 – 28th International Conference on Computer Graphics and Vision*. – Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (TUSUR)Tomsk; Russian Federation; 24-27 September 2018. – pp. 358-361.

159. LePotier, C. Finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for anisotropic diffusion operators / C. LePotier // *Finite Volumes for Complex Applications* / Ed. by R. Eymard, J.-M. Hérard. 2008. – pp. 103-118.
160. Li, W. Geometrically nonlinear analysis of thin-shell structures based on an isogeometric-meshfree coupling approach / W. Li, N. Nguyen-Thanh, K. Zhou // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2018. – Vol. 336. – pp. 111-134. – DOI: 10.1016/j.cma.2018.02.018.
161. Lipnikov, K. A monotone finite volume method for advection-diffusion equations on unstructured polygonal meshes / K. Lipnikov, D. Svyatskiy, Yu. Vassilevski // *J. Comp. Phys.* – 2010. – Vol. 229. – pp. 4017-4032.
162. Lipnikov, K. Interpolation-free monotone finite volume method for diffusion equations on polygonal meshes / K. Lipnikov, D. Svyatskiy, Yu. Vassilevski // *J. Comp. Phys.* – 2009. – Vol. 228. – No. 3. – pp. 703-716.
163. Maraveas, C. Numerical evaluation on shell buckling of empty thin-walled steel tanks under wind load according to current american and european design codes / C. Maraveas, G.A. Balokas, K.D. Tsavdaridis // *Thin-Walled Structures*, 2015. – Vol. 95. – pp. 152-160. – DOI: 10.1016/j.tws.2015.07.007.
164. Michael Thomas Flanagan's Java Scientific Library. Точка доступа: <https://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/java/> (дата обращения: 23.07.2019).
165. Nielsen, M.B. A simple procedure for embedding seismic loads in foundation superelements for combined wind, wave and seismic analysis of offshore wind turbine structures / M.B. Nielsen, E. Sahin // *Paper presented at the COMPDYN Proceedings*, 2019. – Vol. 3. – pp. 4628-4640. – DOI: 10.7712/120119.7255.19324.
166. Popov E.V. et al, Visualization and Analysis of Molecular Potential Energy Surface (Pes) and Its Minima. IADIS International Conference Interfaces and Human Computer Interaction 2019 (part of MCCSIS 2019). – pp. 411-415.
167. Shamloofard, M. Development of a shell superelement for large deformation and free vibration analysis of composite spherical shells / M. Shamloofard, A. Hosseinzadeh, M.R. Movahhedy // *Engineering with Computers*, 2021. – Vol. 37. – No. 4. – pp. 3551-3567. – DOI: 10.1007/s00366-020-01015-w.

168. Tornabene, F. A new doubly-curved shell element for the free vibrations of arbitrarily shaped laminated structures based on weak formulation isogeometric analysis / F. Tornabene, N. Fantuzzi, M. Baccocchi // *Composite Structures*, 2017. – Vol. 171. – pp. 429-461. – DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.03.055.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
 ДОКУМЕНТЫ, ПОДТВЕРЖДАЮЩИЕ ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
 ДИССЕРТАЦИИ

Общество с Ограниченной Ответственностью

ФИРМА «ПРОМСТРОЙРЕМОНТ»

ДНР, 83017, г. Донецк, ул. Лазаренко, 63.

Идентификационный код 31738990

Счёт 40702810220730000249 в Центральном Республиканском Банке ДНР, БИК 310101001

Тел/факс +38(062) 297-18-24, 297-84-74, E-mail: prombudrem@mail.ru

Исх. № 367 от 18.06.2021г.

В специализированный совет
 по защите диссертаций

О внедрении результатов
 диссертационной работы

Результаты диссертационной работы ассистента кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры» Шевчук О.А. на соискание научной степени кандидата технических наук, а именно представленный автором метод геометрического моделирования для расчета напряжённо-деформированного состояния тонкостенных оболочек инженерных сооружений, принят к внедрению и использован для оценки напряженно-деформированного состояния танка энергонакопителя в рамках договора № 190421 от 19.04.2021 г. по теме «Обследование танка энергонакопителя варницы №2 и выдача рекомендаций по восстановлению работоспособности танка, выявлению возможных причин аварии, разработка рекомендаций по недопущению подобной ситуации в процессе дальнейшей эксплуатации танка на территории ООО «ДПЗ»».

Генеральный директор



Москаленко В.И.





**Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики**
**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры»**

286123, ДНР, г. Макеевка, ул. Державина, 2,
тел.: +38 (062) 343-70-33, email: mailbox@donnasa.org, идент. код 02070795

от 19.06.2021 № 11
на № _____ от _____

СПРАВКА

о внедрении результатов исследований диссертационной работы Шевчук О.А., представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (технические науки)

Настоящая справка выдана ассистенту кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» Шевчук О.А. о том, что результаты её научно-исследовательской работы применяются при проведении лабораторных занятий для подготовки бакалавров по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» при изучении дисциплины «Информационные технологии» ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры».

Исследования Шевчук О.А. обеспечили возможность применения методов геометрического моделирования к численному решению дифференциальных уравнений с частными производными, которые описывают напряженно-деформированное состояние строительных конструкций и их отдельных элементов.

Первый проректор
ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры»
д.э.н., профессор



В.Г. Севка

Заведующий кафедрой
«Специализированные информационные технологии и системы», к.т.н., доцент

Я.В. Назим



ПРИЛОЖЕНИЕ Б
ЛИСТИНГИ ПРОГРАММ

**Листинг программы определения точечных уравнений геометрических
интерполянтов**

restart;

n:= 5;

e:= 0;

for *i* from 0 to *n* do

$$eq[i] := A[i + 1] \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n - i)!} \cdot (1 - t)^{n-i} \cdot t^i:$$

e := e + eq[i];

od:

S:= {}: SA:= {}: SM := {}:

for *i* from 0 to *n* do

$$eq1[i] := \text{subs} \left(\left\{ t = \frac{i}{n} \right\}, e \right) = M[i + 1]:$$

$$S := S \cup \{eq1[i]\}:$$

$$SA := SA \cup \{A[i + 1]\}:$$

$$SM := SM \cup \{M[i + 1]\}:$$

od:

R:= solve(S, SA);

assign(R);

collect(e, SM);

**Листинг программы численного решения усовершенствованного ДУ
моделирования ДС стального цилиндрического резервуара с
несовершенствами**

restart:

with(plots):

$d:= 8.94; d1:= 8.44; a:= 6.165; \text{Gamma}:= 9810; h:= 0.005; E:= 2.1 \cdot 10^{11}; \text{Mu}:= 0.3;$

$m:= 6; \text{Alfa}:= 0.5;$

$\text{delta}:= 4.18854864008229 \cdot 10^{-6} x^6 - 0.000170774784156000 x^5 +$
 $0.00253186418987671 x^4 - 0.0176783735198028 x^3 + 0.0610220210001483 x^2 -$
 $0.0894407124711603 x;$

$\text{per}:= 3.70749996031392 \cdot 10^{-6} x^6 - 0.000160204901066099 x^5 + 0.00244996253983317 x^4$
 $- 0.0173719778094554 x^3 + 0.0602377972313496 x^2 - 0.0890388110172845 x;$

for i from 0 to m do

$x[i + 1] := d1 \cdot \frac{i}{m};$

od;

$t := \frac{x}{d1};$

$w := \left((1-t)^6 - \frac{87(1-t)^5 t}{10} + \frac{227(1-t)^4 t^2}{10} - \frac{227(1-t)^3 t^3}{10} + \frac{87(1-t)^2 t^4}{10} + \right.$
 $6 \left(-\frac{1}{6} + \frac{t}{6} \right) t^5 \Big) w1 + \left(36(1-t)^5 t - \frac{666(1-t)^4 t^2}{5} + \frac{756(1-t)^3 t^3}{5} - \frac{306(1-t)^2 t^4}{5} + \right.$
 $6 \left(\frac{6}{5} - \frac{6t}{5} \right) t^5 \Big) w2 + \left(-45(1-t)^5 t + \frac{603(1-t)^4 t^2}{2} - \frac{837(1-t)^3 t^3}{2} + \frac{369(1-t)^2 t^4}{2} + \right.$
 $6 \left(-\frac{15}{4} + \frac{15t}{4} \right) t^5 \Big) w3 + \left(40(1-t)^5 t - 308(1-t)^4 t^2 + 600(1-t)^3 t^3 - 308(1-t)^2 t^4 + \right.$
 $6 \left(\frac{20}{3} - \frac{20t}{3} \right) t^5 \Big) w4 + \left(-\frac{45(1-t)^5 t}{2} + \frac{369(1-t)^4 t^2}{2} - \frac{837(1-t)^3 t^3}{2} + \frac{603(1-t)^2 t^4}{2} + \right.$
 $6 \left(-\frac{15}{2} + \frac{15t}{2} \right) t^5 \Big) w5 + \left(\frac{36(1-t)^5 t}{5} - \frac{306(1-t)^4 t^2}{5} + \frac{756(1-t)^3 t^3}{5} - \frac{666(1-t)^2 t^4}{5} + \right.$

$$6(6 + 6t)t^5)w6 + \left(-(1-t)^5t + \frac{87(1-t)^4t^2}{10} - \frac{227(1-t)^3t^3}{10} + \frac{227(1-t)^2t^4}{10} - \frac{87(1-t)t^5}{10} + t^6 \right)w7;$$

$w := \text{simplify}(w);$

$dw4 := \text{diff}(w, x\$4);$

$Z := -\text{Gamma} \cdot (dl - x);$

$$K := \frac{E \cdot h \cdot 0.4}{a^2 \cdot \left(1 - \frac{\text{Mu} \cdot \text{Alfa}}{2} \right)};$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - M^2)};$$

$$\text{Betta} := \frac{K}{D1};$$

$$eq := \frac{Z}{D1} = dw4 + \text{Betta} \cdot (w + \delta);$$

$eq1 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[1]\}, eq));$

$eq2 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[2]\}, eq));$

$eq3 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[3]\}, eq));$

$eq4 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[4]\}, eq));$

$eq5 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[5]\}, eq));$

$eq6 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[6]\}, eq));$

$eq7 := \text{evalf}(\text{subs}(\{x = x[7]\}, eq));$

$R := \text{fsolve}(\{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7\}, \{w1, w2, w3, w4, w5, w6, w7\});$

$\text{assign}(R);$

$w := \text{simplify}(w);$

$c1 := \text{plot}(-w + w1, x = 0 .. dl);$

$c2 := \text{plot}(\text{per}, x = 0 .. d, \text{color} = \text{blue});$

$\text{display}(c1, c2);$

$-w + w1;$

**Листинг программы числовой оценки результатов моделирования с
помощью коэффициента детерминации**

restart:

with(plots):

Digits:= 100; d:= 8.44; n:= 200;

for j from 0 to n do

$$x[j + 1] := d \cdot \frac{j}{n};$$

$W[j + 1] := 3.70749996031392 \cdot 10^{-6} x[j + 1]^6 - 0.000160204901066099 x[j + 1]^5 +$
 $0.00244996253983317 x[j + 1]^4 - 0.0173719778094554 x[j + 1]^3 +$
 $0.0602377972313496 x[j + 1]^2 - 0.0890388110172845 x[j + 1];$

$w[j + 1] := -8.67361737988404 \cdot 10^{-18} + 4.18854200 \cdot 10^{-6} x[j + 1]^6 -$
 $0.000170774611500000 x[j + 1]^5 + 0.00253186243200000 x[j + 1]^4 -$
 $0.0176783653600000 x[j + 1]^3 + 0.0610217012400000 x[j + 1]^2 -$
 $0.0902577374199999 x[j + 1];$

od:

$$SR := \frac{\text{sum}(W[k], k = 1 .. n + 1)}{n + 1};$$

$S := \text{sum}((w[k] - W[k])^2, k = 1 .. n + 1);$

$S1 := \text{sum}((SR - W[k])^2, k = 1 .. n + 1);$

$$R2 := 1 - \frac{S}{S1};$$

evalf(R2);

**Листинг программы построения поверхности отклика, характеризующей
перемещения в стенке стального цилиндрического резервуара с
несовершенствами, и поиска ее экстремумов**

restart:

with(plots):

n:= 12; d1:= 8.44;

Z:= ExcelTools:-Import("D:/_xlsx", "Перемещения", "C31:O37");

for j from 0 to n do

$$x[j + 1] := \text{evalf} \left(360 \cdot \frac{j}{n} \right);$$

$$y[j + 1] := d1 \cdot v;$$

od:

$$X := v \cdot d1;$$

*w[1]:= 4.33680868994202·10⁻¹⁸ + 4.18854199·10⁻⁶X⁶ - 0.000170774611000000X⁵ +
0.00253186243000000X⁴ - 0.0176783653500000X³ + 0.0610217011700000X² -
0.0902577374700001X;*

*w[2]:= -3.46944695195361·10⁻¹⁸ + 8.13846787·10⁻⁶X⁶ - 0.000266317626000000X⁵ +
0.00334631306000000X⁴ - 0.0202794187100000X³ + 0.0609774773700000X² -
0.0797347317500000X;*

*w[3]:= -2.01227923213310·10⁻¹⁶ + 0.00001204272026X⁶ - 0.000360612929000000X⁵ +
0.00414783387999997X⁴ - 0.0228175099299996X³ + 0.0607912404899984X² -
0.0689335147599975X;*

*w[4]:= 8.67361737988404·10⁻¹⁹ + 0.00001599265192X⁶ - 0.000456156092000000X⁵ +
0.00496228586800000X⁴ - 0.0254185689400000X³ + 0.0607473492500000X² -
0.0582258011500000X;*

*w[5]:= 4.33680868994202·10⁻¹⁹ + 0.00002462992228X⁶ - 0.000673050793900000X⁵ +
0.00694768723400000X⁴ - 0.0331642176000000X³ + 0.0700551882700000X² -
0.0449191156200000X;*

$$w[6]:= -8.67361737988404 \cdot 10^{-19} + 0.00003324816056X^6 - 0.000889452066300000X^5 + 0.00892822939800000X^4 - 0.0408871377900000X^3 + 0.0793129721100000X^2 - 0.0316776244500000X;$$

$$w[7]:= 1.73472347597681 \cdot 10^{-18} + 0.0000418854210X^6 - 0.00110634654300000X^5 + 0.0109136289200000X^4 - 0.0486327795000000X^3 + 0.0886206526000000X^2 - 0.0184738077000000X;$$

$$w[8]:= 8.67361737988404 \cdot 10^{-19} + 0.00003257540497X^6 - 0.000852879230200000X^5 + 0.00826633158800000X^4 - 0.0352546022800000X^3 + 0.0546021174000000X^2 + 0.0178743851800000X;$$

$$w[9]:= -1.73472347597681 \cdot 10^{-18} + 0.0000232718517X^6 - 0.000599556133000000X^5 + 0.00562016504000000X^4 - 0.0218804529000000X^3 + 0.0205924829000000X^2 + 0.0541950585000000X;$$

$$w[10]:= -1.73472347597681 \cdot 10^{-18} + 0.00002327177441X^6 - 0.000599554357100000X^5 + 0.00562014983800000X^4 - 0.0218803930000000X^3 + 0.0205919908600000X^2 + 0.0540107412800000X;$$

$$w[11]:= 4.33680868994202 \cdot 10^{-18} + 0.00001070367108X^6 - 0.000287656830700000X^5 + 0.00282609867400000X^4 - 0.0115627639900000X^3 + 0.0113944778200000X^2 + 0.0300693119600000X;$$

$$w[12]:= -5.89805981832114 \cdot 10^{-17} + 1.217 \cdot 10^{-11}X^6 - 0.0000295219808000000X^5 + 0.0006656305090000000X^4 - 0.005221831349999999X^3 + 0.01632770602999999X^2 - 0.01584840721999999X;$$

$$w[13]:= 4.33680868994202 \cdot 10^{-18} + 4.18854199 \cdot 10^{-6}X^6 - 0.000170774611000000X^5 + 0.00253186243000000X^4 - 0.0176783653500000X^3 + 0.0610217011700000X^2 - 0.0902577374700001X;$$

for j to n do

$$a1a2[j]:= ((x[j] - x[j + 1])^2 + (y[j] - y[j + 1])^2 + (w[j] - w[j + 1])^2)^{0.5};$$

$$a1a3[j]:= ((x[j] - x[j + 2])^2 + (y[j] - y[j + 2])^2 + (w[j] - w[j + 2])^2)^{0.5};$$

$$a2a3[j]:= ((x[j + 1] - x[j + 2])^2 + (y[j + 1] - y[j + 2])^2 + (w[j + 1] - w[j + 2])^2)^{0.5};$$

od:

for j to n - 1 do

$$xb[j] := (x[j + 2] - x[j]) \cdot a2a3[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + x[j + 1];$$

$$yb[j] := (y[j + 2] - y[j]) \cdot a2a3[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + y[j + 1];$$

$$zb[j] := (w[j + 2] - w[j]) \cdot a2a3[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + w[j + 1];$$

od:

for j to n - 1 do

$$xc[j] := (x[j] - x[j + 2]) \cdot a1a2[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + x[j + 1];$$

$$yc[j] := (y[j] - y[j + 2]) \cdot a1a2[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + y[j + 1];$$

$$zc[j] := (w[j] - w[j + 2]) \cdot a1a2[j] / (Pi \cdot a1a3[j]) + w[j + 1];$$

od:

$$xm[1] := x[1] \cdot (1 - u)^2 + 2 \cdot xc[1] \cdot u \cdot (1 - u) + x[2] \cdot u^2;$$

$$ym[1] := d1 \cdot v;$$

$$zm[1] := w[1] \cdot (1 - u)^2 + 2 \cdot zc[1] \cdot u \cdot (1 - u) + w[2] \cdot u^2;$$

$$xm[n] := x[n] \cdot (1 - u)^2 + 2 \cdot xb[n - 1] \cdot u \cdot (1 - u) + x[n + 1] \cdot u^2;$$

$$ym[n] := d1 \cdot v;$$

$$zm[n] := w[n] \cdot (1 - u)^2 + 2 \cdot zb[n - 1] \cdot u \cdot (1 - u) + w[n + 1] \cdot u^2;$$

for j from 2 to n - 1 do

$$xm[j] := x[j] \cdot (1 - u)^3 + 3 \cdot xb[j - 1] \cdot (1 - u)^2 \cdot u + 3 \cdot xc[j] \cdot (1 - u) \cdot u^2 + x[j + 1] \cdot u^3;$$

$$ym[j] := d1 \cdot v;$$

$$zm[j] := w[j] \cdot (1 - u)^3 + 3 \cdot zb[j - 1] \cdot (1 - u)^2 \cdot u + 3 \cdot zc[j] \cdot (1 - u) \cdot u^2 + w[j + 1] \cdot u^3;$$

od:

for j to n do

$$sp[j] := plot3d([xm[j], ym[j], zm[j]], u = 0 .. 1, v = 0 .. 1);$$

od;

$$display3d(seq(sp[j], j = 1 .. n));$$

$$R := fsolve(\{diff(zm[9], u), diff(zm[9], v) = 0\}, \{u = 0 .. 1, v = 0 .. 1\});$$

$$assign(R);$$

$$xm[9]; ym[9]; zm[9];$$