

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И
АРХИТЕКТУРЫ»**

На правах рукописи

УДК 004. 94

Чернышева Оксана Александровна

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ СРЕДСТВА
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ
ПОВЕРХНОСТИ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ (технические науки)

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук,
доцент Конопацкий Е.В.

Идентичность всех экземпляров
ПОДТВЕРЖДАЮ
Ученый секретарь диссертационного
совета Д 01.024.04
к.т.н.

Т.В. Завадская

Донецк – 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
РАЗДЕЛ 1 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ	14
1.1 Анализ существующих способов создания цифровых моделей рельефа местности	14
1.2 Вычислительные способы реконструкции топографической поверхности на основе дискретного массива точек.....	19
1.3 Анализ существующих способов вертикальной планировки участка топографической поверхности.....	22
1.4 Обоснование выбора БН-исчисления для создания вычислительных алгоритмов участка нерегулярной поверхности	27
Выводы по первому разделу.....	29
РАЗДЕЛ 2 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧАСТКА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ	31
2.1 Реконструкция топографической поверхности на основе кривых 2-го порядка, проходящих через наперед заданные точки.....	31
2.1.1 Использование параболической интерполяции для моделирования отсека топографической поверхности	32
2.1.2 Использование эллиптической и гиперболической интерполяции для моделирования отсека топографической поверхности.....	39
2.2 Реконструкция отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперёд заданных точек, с помощью модифицированного уравнения дуги кривой Безье 3-го порядка	42
2.2.1 Общий подход к конструированию дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, на основе полиномов Бернштейна.....	43
2.2.2 Определение дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперед заданные точки.....	44
2.2.3 Моделирование отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперед заданных точек.....	47

2.3 Моделирование участка нерегулярной топографической поверхности.....	50
2.3.1 Моделирование участка топографической поверхности на регулярной сети точек	52
2.3.2 Моделирование участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек	53
2.3.3 Моделирование поверхности рельефа местности на основе спутниковых снимков SRTM	55
2.3.4 Геометрическое моделирование микроструктуры поверхности материала	66
Выводы по второму разделу.....	68
РАЗДЕЛ 3 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ	70
3.1 Вычислительный алгоритм построения горизонталей отсека топографической поверхности	70
3.2 Вычислительный алгоритм формирования линий вероятного водотока на топографической поверхности	75
3.3 Определение площадей сегментов топографической поверхности методами БН-исчисления.....	78
3.4 Определение объёмов земляных работ на топографической поверхности	85
Выводы по третьему разделу.....	88
РАЗДЕЛ 4 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАНИРОВКИ УЧАСТКА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ...	90
4.1 Вычислительный алгоритм вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности	91
4.2 Контрольный пример вертикальной планировки участка топографической поверхности	93

4.3 Вертикальная планировка участка топографической поверхности с учётом поправки на показатель разрыхления грунта	98
Выводы по четвертому разделу.....	100
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	102
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	105
Приложение А Копии документов о внедрении результатов исследований	121
Приложение Б Листинг программы для создания ЦМР на регулярной сети точек в программном пакете Maple	123
Приложение В Листинг программы для создания ЦМР на нерегулярной сети точек в программном пакете Maple	125
Приложение Г Листинг программы для проведения вычислительного эксперимента по точности аппроксимации сферической поверхности 16-точечными отсеками	146
Приложение Д Листинг программы по вертикальной планировке рельефа местности с сохранением баланса земляных работ и с учётом поправки на показатель разрыхления грунта	149

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Аналитическое и компьютерное моделирование участка топографической поверхности относится к задачам определения цифровых моделей рельефа местности и является неотъемлемой составляющей современных геоинформационных систем, а также активно используется в горном деле, геодезии, картографии, землеустройстве, навигации, строительстве и т.д. На данный момент методы геометрического моделирования участка топографической поверхности по способу аппроксимации можно разделить на две категории: линейные и криволинейные. К линейной аппроксимации относятся различные способы триангуляции, преимуществом которых является возможность моделирования участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек. Недостатком является значительное искажение формы топографической поверхности при больших расстояниях между исходными точками сети. К криволинейной аппроксимации можно отнести сплайновые методы моделирования топографической поверхности, которые более точно передают криволинейную форму топографической поверхности, но при этом их построение возможно исключительно на основе регулярной сети точек, а если исходная сеть имеет нерегулярный характер, то приходится выполнять дополнительную операцию – переход от нерегулярной сети точек к регулярной. Чтобы исключить необходимость такого перехода, возникает задача аппроксимации участка топографической поверхности криволинейной поверхностью, которая при этом может быть использована на нерегулярной сети точек без предварительной их обработки. Вместе с тем с изменением способа моделирования участка топографической поверхности возникает необходимость решения типовых задач на топографической поверхности, к которым относятся определение горизонталей участка топографической поверхности с последующим построением линий вероятного водотока, определение площади участка топографической поверхности и вертикальная планировка участка топографической поверхности. В этой связи совершенствование методов

геометрического моделирования топографической поверхности на базе новых вычислительных алгоритмов и современных компьютерных средств является актуальной научно-практической задачей, имеющей отраслевое значение.

Степень разработанности темы исследования. Теоретической базой для проведения исследований стали работы ведущих отечественных и зарубежных учёных и их учеников:

– в области моделирования ЦМР: Мусина О.Р. [1], Демиденко А.Г. [2], Ястребова А.И. [2, с.15], Мусихина В.В. [3], Куркова Ю.С. [3, с. 116], Баранова Ю.Б. [4], Кантемирова Ю.И. [5], Киселевского Е.В. [5, с. 31], Болсуновского М.А. [5, с. 33], Попова Е.В. [6, 7], Коротина А.С. [6, с. 29; 7, с. 102-106], Клименко А.С. [8], Бугрова Н.В. [9], Голубева В.И. [10], Дижевского А.Ю. [11], Маруяски Т. [12], Мураи С. [13], Накамуры Х. [13, с. 410-415], Нгуена Тхе Конга [14], Флоринского И.В. [15], Кочневой А.А. [16], Семеновой Е.Ю. [17, 18], Костина А.В. [19, 20], Хромых О.В. [21], Хромых В.В. [21, с. 178], Демерс М. [22] и др.

– в области определения объемов земляных работ: Видуева Н.Г. [23], Галясовского И.В. [24], Иевлевой О.Т. [18, с. 86-87], Дранишникова Ю.А. [25] и др.

– в области создания и развития БН-исчисления: Балюбы И.Г. [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34], Бездитного А.А. [28, с. 286-290], Горягина Б.Ф. [28, с. 290], Полищука В.И. [34, с. 22], Бумаги А.И. [35], Верещаги В.М. [36, 37], Давыденко И.П. [38], Конопацкого Е.В. [39], Крысько А.А. [40], Кучеренко В.В. [41], Малютиной Т.П. [42], Найдыша В.М. [43], и др.;

Несмотря на значительный объем исследований и наличие широкого спектра программных продуктов в области создания цифровых моделей рельефа местности, на данный момент отсутствует единый, математически обоснованный подход, позволяющий моделировать криволинейные участки топографической поверхности на нерегулярной сети точек без предварительной обработки исходных данных, которая заключается в переходе от нерегулярной сети точек к регулярной.

Целью исследования является разработка вычислительных алгоритмов и компьютерных средств моделирования нерегулярной топографической поверхности.

Для достижения поставленной цели сформулированы и решены следующие **задачи:**

1. Разработка вычислительного алгоритма моделирования участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков.

2. Определение площади участка нерегулярной топографической поверхности.

3. Разработка вычислительных алгоритмов построения горизонталей отсека топографической поверхности и линий вероятного водотока.

4. Решение задачи вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности.

5. Разработка комплекса программ, реализующих вычислительные алгоритмы моделирования нерегулярной топографической поверхности, включающие решение широкого спектра инженерных задач на топографической поверхности.

6. Верификация результатов моделирования путём вычислительного эксперимента с использованием полученного комплекса программ.

Объект исследования – участок нерегулярной топографической поверхности.

Предмет исследования – вычислительные точечные алгоритмы и компьютерные средства моделирования нерегулярной топографической поверхности.

Научная новизна полученных результатов:

1. Впервые предложен вычислительный алгоритм геометрического моделирования участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, который является теоретической основой для

создания комплекса программ решения инженерных задач на топографической поверхности.

2. Получили дальнейшее развитие способы определения площади поверхности участка топографической области на базе нового алгоритма моделирования нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-ти точечных отсеков. Предложенный алгоритм позволяет определить площадь отсека топографической поверхности с помощью высокоточных методов интегрального и дифференциального исчисления, а не с помощью приближённых методов дискретной интерполяции, которые нашли широкое применение на практике.

3. Впервые обоснован вычислительный алгоритм построения горизонталей участка топографической поверхности, состоящий из 16-точечных отсеков, и предложен вычислительный алгоритм формирования линий вероятного водотока на топографической поверхности, который расширяет возможности применения цифровых моделей поверхности земельного участка, для определения скорости развития эрозионных процессов на землях сельскохозяйственного назначения и создаёт предпосылки для разработки автоматизированной системы мониторинга состояния грунтов.

4. Предложен вычислительный алгоритм вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности, который позволяет определить необходимую проектную отметку высот для минимизации объёмов земляных работ.

Теоретическая значимость работы состоит в обосновании нового способа геометрического и компьютерного моделирования незакономерной криволинейной поверхности на основе дискретно заданной нерегулярной сети точек с помощью кривых 3-го порядка двойкой кривизны, который может быть эффективно использован не только для создания цифровых моделей рельефа местности, но и для моделирования двухфакторных процессов и явлений с большим количеством исходной экспериментально-статистической информации.

Исследования по теме диссертации выполнены в рамках научно-исследовательской работы ГОУ ВПО «ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ» К-2-09-11 «Создание графического и вычислительного аппарата для моделирования топографических линий и поверхностей и их взаимного положения в рамках специализации «Землеустройство» (номер государственной регистрации 0111U0081760).

Практическая значимость полученных результатов заключается в реализации разработанных вычислительных алгоритмов для решения широкого спектра задач на топографических картах и планах, в том числе:

- составление землеустроительной и кадастровой проектной документации;
- построение цифровых моделей рельефа местности на основе дискретного массива точек при создании геоинформационных систем и баз данных географической информации;
- создание информационных и технологических систем управления ресурсами в процессах воспроизведения товарной продукции плодоводства на мелиоративных землях при построении геоморфологических карт;
- подготовка проектной документации для вертикальной планировки топографической поверхности многоцелевого назначения.

В результате разработан комплекс программ решения инженерных задач на нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, который позволяет моделировать топографическую поверхность, как на регулярной, так и на нерегулярной сети точек, сохраняя при этом криволинейную форму аппроксимируемой поверхности.

Практическая ценность исследований подтверждается внедрением в практику подготовки проектной документации (справка о внедрении №51416 от 13.02.17 г. выдана отделом архитектуры и градостроительства администрации города Ясиноватая для составления проектной документации по вертикальной планировке жилых районов г. Ясиноватая), а также в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ» (справка №4-04-1 от 13.01.17 г. принята к внедрению в

учебный процесс при чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплине «Инженерная графика при кадастровых работах» и «Географические информационные системы» для подготовки бакалавров по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»).

Методология и методы исследования. Предложенные в работе вычислительные алгоритмы моделирования нерегулярной топографической поверхности основываются на графических методах формообразования геометрических объектов, аналитическое описание которых выполнено в рамках математического аппарата – БН-исчисление (точечное исчисление Балюбы-Найдыша), для которого точка представляется системой ее проекций на оси глобальной или локальной системы координат, что позволяет получать параллельные проекции геометрического объекта на подпространства и допускает по координатный расчет геометрической объекта.

Также используются идеи и методы начертательной, аналитической, дифференциальной и аффинной геометрии. Программная реализация вычислительных алгоритмов в виде комплекса программ по расчету, визуализации и решению оптимизационных задач на топографической поверхности выполнено с помощью программного пакета Maple.

Положения, выносимые на защиту:

– вычислительный алгоритм моделирования нерегулярной топографической поверхности, состоящей из криволинейных регулярных 16-точечных отсеков, одинаково эффективно используется как на регулярной, так и на нерегулярной сети исходных точек без необходимости дополнительного преобразования нерегулярной сети точек в регулярную;

– комплекс программ, сформированный на основе вычислительных алгоритмов моделирования участка нерегулярной топографической поверхности, позволяет с высокой точностью выполнять реконструкцию цифровых моделей рельефа местности на основе спутниковых снимков, исключая артефакты, полученные в результате съёмки;

– линейная зависимость между высотными отметками и разностью объёмов выемки и насыпи, установленная для определения проектной отметки вертикальной планировки цифровой модели рельефа местности, полученной на основе криволинейных регулярных 16-точечных отсеков поверхности.

Степень достоверности и апробация результатов обеспечивается корректным использованием математического аппарата БН-исчисление, который основан на инвариантах аффинной геометрии. Также корректность аналитических моделей геометрических объектов проверена с помощью компьютерно-графических изображений, полученных в программном пакете Maple, по которым визуально определялось соответствие геометрической формы параметрическим уравнениям. Кроме того выполнено исследование точности моделирования и расчёта площади с помощью предложенных в работе вычислительных алгоритмов на эталонной сферической поверхности. Результаты решения оптимизационной задачи вертикальной планировки подтверждаются значительным количеством вычислительных экспериментов, проведенных как на регулярной, так и на нерегулярной сети исходных точек.

Полученные результаты, положения и выводы отвечают соответствующим требованиям паспорта специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (технические науки), в частности: п.1 «Разработка новых математических моделей и методов компьютерного моделирования явлений, объектов, систем и процессов»; п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий»; п.4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов»; п.5 «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современных технологий математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Тема и содержание диссертации Чернышевой О.А. соответствует паспорту научной специальности 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные

методы и комплексы программ» (технические науки), по которой диссертационному совету Д 01.024.04 предоставлено право принимать диссертационные работы к защите.

Апробация результатов диссертации. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на: XVIII Юбилейной международной научно-практической конференции «Научные итоги: достижения, проекты, гипотезы» (г. Минеральные Воды, 2013 г.); XVI Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования» (г. Мелитополь, 2014 г.); Всеукраинской научно-методической конференции «Компьютерно-интегрированные технологии: образование, наука, производство» (г. Луцк, 2015 г.); Международной научной конференции Московского физико-технического института (государственного университета) Института физико-технической информатики SCVRT1516 (г. Москва, 2016 г.), 3-й Республиканской конференции молодых ученых, аспирантов, студентов «Научно-технические достижения студентов, аспирантов, молодых ученых строительной архитектурной отрасли» (г. Макеевка, 2017 г.), VII Международной научно-практической Интернет-конференции КГП-2017 «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации» (г. Пермь, 2017 г.), научно-практической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов «Графика. Вчера, сегодня, завтра» (г. Донецк, 2017 г.), XVII Международной конференции «Здания и сооружения с применением новых материалов и технологий» (г. Макеевка, 2018).

Личный вклад. Основные научные результаты диссертации, которые включают вычислительные алгоритмы моделирования участка топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, на регулярной и нерегулярной сети точек, а также моделирование горизонталей и линий вероятного водотока, расчёт площадей и объёмов топографической поверхности и её вертикальную планировку с соблюдением баланса земляных работ, а также комплекс программ для их реализации получены автором лично.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы

автором самостоятельно и в соавторстве в 12 научных изданиях, 5 из них в рецензируемых научных изданиях: в том числе 3 – в рецензируемых научных журналах и изданиях, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук в Российской Федерации, 2 – в зарубежных научных изданиях, 3 – по материалам научных конференций, 4 – в других изданиях.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов с выводами, заключения и списка использованной литературы. Общий объём текста диссертации – 150 страниц, включая 37 рисунков, 5 таблиц, библиографический список из 137 наименований и 5 приложений.

РАЗДЕЛ 1

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИФРОВЫХ МОДЕЛЕЙ
РЕЛЬЕФА МЕСТНОСТИ

1.1 Анализ существующих способов создания цифровых моделей рельефа местности

Цифровые модели рельефа местности (ЦМР) представляют собой математическое описание земной поверхности как совокупности расположенных на ней точек, связей между ними и метода определения высот произвольных точек, принадлежащих области моделирования, по их плановым координатам.

Теоретические основы моделирования ЦМР заложили: Мусин О.Р. [1, с. 28-29], Демиденко А.Г. [2, с. 15-18], Ястребов А.И. [2, с. 15-18], Мусихин В.В. [3, с. 116-124], Курков Ю.С. [3, с. 116-124], Баранов Ю.Б. [4, с. 31-34], Кантемиров Ю.И. [5, с. 31-34], Киселевский Е.В. [5, с. 31-34], Болсуновский М.А. [5, с. 31-34], Попов Е.В. [6, с. 29-34; 7, с. 102-106], Клименко А.С. [8, с. 46-52], Бугров Н.В. [9, с. 151-173], Голубев В.И. [10, с. 252], Дижевский А.Ю. [11, с. 117], Флоринский И.В. [15, с. 33-38], Кочнева А.А. [16, с. 90-96], Семенова Е.Ю. [17, с. 73; 18, с. 86-87], Костин А.В. [19, с. 23-28; 20, с. 63-70], Хромых О.В. [21, с. 178], Хромых В.В. [21, с. 178] и др.

Анализ литературных источников показал, что наряду с графическими и аналитическими способами решения задач математической картографии [44, с. 336; 45], в последнее время, в связи со стремительным развитием компьютерных и информационных технологий, получили широкое распространение вычислительные способы. Например, создание цифровых моделей рельефа местности (ЦМР [16, с. 90-96; 46, 47, 48, 49, с. 85-86]), которые являются неотъемлемой частью любой современной геоинформационной системы, по своей сути можно отнести к вычислительным способам определения топографической поверхности. В соответствии с [50, с. 480] под ЦМР принято понимать средство цифрового представления трехмерных пространственных объектов (поверхностей или рельефов) в виде трехмерных данных, образующих множество высотных отметок

(отметок глубин) и иных значений аппликат (координаты z) в узлах регулярной или нерегулярной сети или совокупность записей горизонталей (изогипс, изобат) или иных изолиний. На данный момент все способы построения ЦРМ можно условно разбить на две группы:

1. Способы, основанные на нелинейной интерполяции высот с использованием полиномов, сплайнов [51, с. 36; 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 131, 132], корреляционных функций и т.п., различающиеся видом используемой функции, способом отбора исходной информации:

- кусочно-полиномиальный способ [74, с. 265; 75];
- способы, основанные на применении рядов Фурье [76].

2. Способы, основанные на построении геометрически упорядоченной (регулярной или нерегулярной) модели, элементами которой являются определенным образом упорядоченные геометрические объекты. Например, это могут быть либо линии, либо поверхности различных многогранников (треугольников, четырехугольников и т.п.):

- цифровая модель TIN (Triangular Irregular Networks) [21, с. 178; 77, 78, 79];
- цифровая модель DEM (Digital Elevation Model) [19, с. 23-28; 20, с. 63-70; 21, с. 178; 133];
- фотограмметрическая технология построения цифровой модели [80, с. 10-15; 81, с. 115; 82, 83, 84, 85, 86].

Из этих методов в информационных технологиях наибольшее распространение получили различные способы триангуляции, которые широко применяются в геоинформатике для моделирования поверхностей и анализа геометрической близости, в компьютерной графике для построения моделей трехмерных объектов, а также в различных численных методах решения дифференциальных уравнений (метода конечных элементов [134, с. 219-242], метод конечных разностей [87, с. 83] и п.т.).

Среди отечественных учёных можно выделить работы Скворцова А.В. [78, с. 128; 88, с. 22-47; 89, с. 127-138; 78, с. 14-39], Галанина М.П. [90, с. 32], Щеглова

И.А. [90, с. 32], которые занимались задачей построения триангуляции Делоне – одной из базовых в вычислительной геометрии. К ней сводятся многие другие задачи, она широко используется в машинной графике и геоинформационных системах для моделирования поверхностей и решения пространственных задач. Из зарубежных учёных можно выделить работы Tamal K. Dey [135, с. 230] и Farin [136, с. 277-280].

Кроме того в работе [91] Белкин Е.А. разработал теоретические основы и методы модульно-геометрического подхода к моделированию процесса формирования микрорельефа поверхности. В работе [92] Мартиросов А.Л. предложил оригинальную методику составления аналитического описания топографических поверхностей заданных набором геометрически определенных линий уровня (горизонталей), в качестве аппроксимирующих функций сечений выбраны полиномиальные кривые требуемого порядка, при этом снижение порядка функции достигается использованием метода наименьших квадратов, погрешность аппроксимации находится в пределах от 0,1 до 0,03 м. Чернова Л.И. [93] занималась разработкой математической модели и алгоритмов нелинейного моделирования рельефа, обеспечивающих качественное решение инженерно-технических задач, а также повышение достоверности представления геопространственной информации при формировании цифровой модели рельефа. Семенова Е.Ю. в работе [94, с. 18] предложила методику моделирования проектной поверхности на основе компьютерной технологии, для описания существующего рельефа использована регулярная модель ЦМР с прямоугольными ячейками сетки, она рассчитывается по существующим отметкам хаотически расположенных характерных точек рельефа. На основе сформированной ЦМР строятся горизонтали существующего рельефа с использованием сплайновой аппроксимации, а информация об их изображении заносится в специальный файл в формате DXF, который поддерживается системой автоматизированного проектирования AutoCAD.

В работе [16, с. 90-96] Кочнева А.А. обосновала методику оценки качества построения цифровых моделей рельефа по данным воздушно лазерного

сканирования при проектировании автодорог. Идея ее работы состоит в использовании модифицированных цифровых моделей рельефа, созданных на основе данных воздушного лазерного сканирования, позволяющих выполнять эффективное проектирование автодорог на различных участках в зависимости от рельефа местности.

Флоринский И.В. [15, с. 33-38] исследовал цифровые модели рельефа при автоматизированном анализе данных дистанционного зондирования. Он выделил основные направления интегрированного анализа ДДЗ и ЦМР – тематическое дешифрирование, исследование влияния рельефа на другие компоненты ландшафта, изучение и корректировка топографического эффекта, трансформирование снимков. Нгуен Тхе Конг [14, с. 101] занимался исследованием и разработкой высокопроизводительного алгоритма построения цифровых моделей рельефа. Он исследовал алгоритмы инкремента и заметающей линии для построения триангуляции Делоне. Предложил методы повышения скорости вычисления для алгоритмов инкремента и заметающей линии.

В работе [95, с. 46-50] Ким В.Б., Прокопенко Е.В. предложен новый подход к обработке геоинформационных данных. Он основан на использовании В-сплайновых поверхностей для моделирования рельефа. В работе Нестеренко Е.А. [96] рассмотрена возможность использования сплайн-поверхности для построения поверхностей по результатам съемок, приводятся различные способы построения поверхностей.

Профессор Попов Е.В. со своим коллегой Коротиним А.С. занимались оценкой точности цифровых моделей рельефа, применяемых для территориальных исследований [6, с. 29-34; 7, с. 102-106], они провели исследование, направленное на выявления возможностей применения матриц высот Aster Global DEM и SRTM DEM для решения аналитических задач. Представили результаты оценки точности, полученных данных путём их сравнения с высотами локального участка местности. Клименко А.С. [8, с. 46-52], Голубев В.И. [10, с. 252], Бугров Н.В. [9, с. 151-173], Дижевский А.Ю. [11, с. 117] занимались виртуальным моделированием территории на основе данных

дистанционного зондирования, проводили исследование существующих алгоритмов триангуляции неявно заданной поверхности, отметили преимущества и недостатки различных подходов.

Хейфец В.С. в работе [97] описывает способ подбора приближенного уравнения, характеризующего рельеф земной поверхности с помощью ортогональных полиномов Чебышева и приводит примеры расчетов для одномерного (гипсометрический профиль) и двумерного (поверхность) случаев. Также Ягодина Л.Л. [98] предложила методику аппроксимации поля рельефа с помощью ортогональных полиномов Чебышева и привела расчетные формулы для вычисления коэффициентов полиномов.

Отдельно следует отметить работу Кузнецова А.Е. и Пошехонова В.И. [99], которые занимались разработкой математических моделей и алгоритмов стереофотограмметрической обработки спектральной спутниковой видеoinформации для проектирования на их основе программного обеспечения оперативного получения трехмерных изображений земной поверхности от систем дистанционного зондирования земли (ДЗЗ [100, 101, 102]), реализующих принцип одновременной съемки подстилающей поверхности.

Общий недостаток этих способов – это большой объем вычислений необходимый для решения поставленной задачи. Отдельным недостатком 1-й группы способов является большая «кусочность» составных ЦМР (т.е. на каждом фрагменте ЦМР, между каждыми соседними точками, получается свое уравнение поверхности). При использовании способов 2-й группы, таких уравнений вообще нет, что приводит к необходимости использования не точных методов дифференциального и интегрального исчисления для анализа и решения прикладных задач, связанных с ЦМР, а приближенных – вычислительных. Это, в свою очередь, ещё увеличивает и без того значительный объем вычислений, необходимых для решения практических задач. Кроме того для реализации способов 1-й группы необходима предварительная подготовка, которая заключается в переходе от нерегулярной сети точек к регулярной. В более

развёрнутом виде недостатки существующих методов моделирования ЦМР представлены на рисунке 1.

Параллельно с развитием ЦМР стали развиваться цифровые модели местности (ЦММ). Под ЦММ следует понимать совокупность информации о положении, характеристиках объектов местности, связях между ними и топографической поверхности, представленные в форме, доступной для обработки в программных комплексах. Большой вклад в разработку теоретических основ математических

моделей местности и их экспериментальное исследование внесли зарубежные ученые: Накамура Х. [13, с. 410-415], Маруяску Т., Мураи С. [12, с. 127-137], Демерс М. [22, с. 504] и другие.

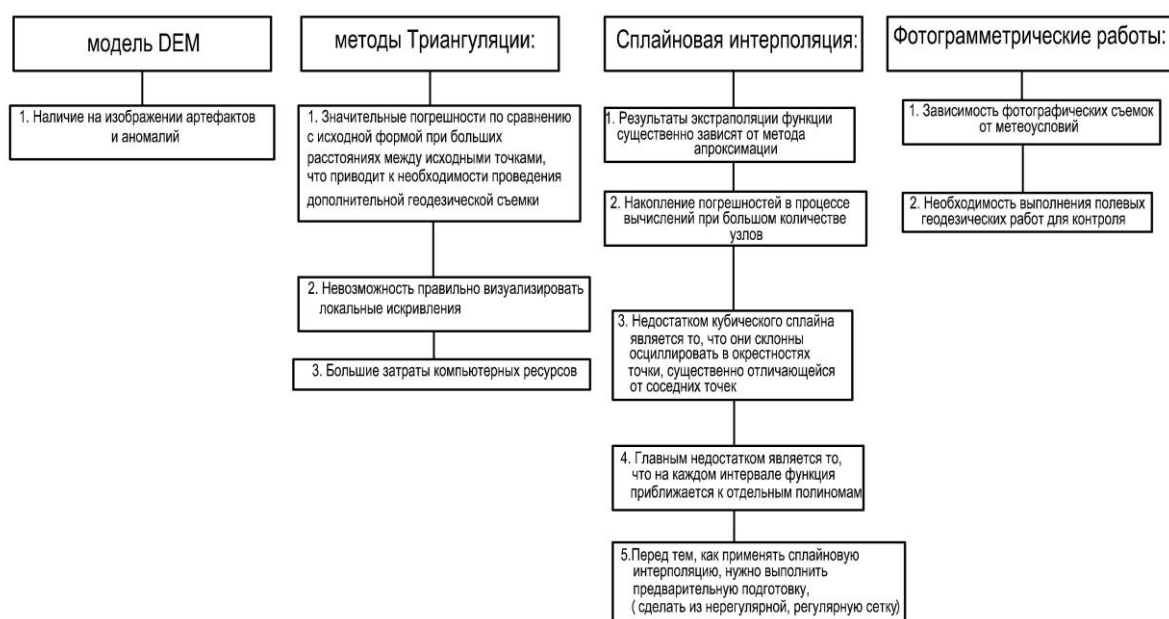


Рисунок 1 – Недостатки существующих методов построения ЦМР

1.2 Вычислительные способы реконструкции топографической поверхности на основе дискретного массива точек

Исследования, посвящённые геометрическому моделированию и аналитическому описанию топографической поверхности, являются одной из актуальных, сложных и до конца не решенных научных задач прикладной

геометрии. Для создания цифровых моделей рельефа, которые нашли широкое применение в геоинформатике, нужно иметь возможность аналитического описания топографической поверхности. Аналитическое же описание такой поверхности вызывает большие сложности, поскольку топографическая поверхность имеет сложную, непредсказуемую и незакономерную форму. Чтобы описать незакономерную форму топографической поверхности на практике используются различные способы интерполяции и аппроксимации. Как было сказано выше, в геоинформационных системах (ГИС [103, 104]) эффективно используются дискретные алгоритмы моделирования топографической поверхности, к которым относятся: триангуляция Делоне, метод скользящего окна, метод весового среднего, глобальный интерполяционный алгоритм и глобальный аппроксимационный алгоритм [78, с. 128; 90, с. 32; 133, с. 230]. Но использование дискретных методов моделирования имеет свои недостатки: долгое время вычислений при построении достаточной плотности точек на большом участке топографической поверхности, невозможность использования методов математического анализа для анализа полученных цифровых моделей рельефа, сложность с построением линий вероятного водотока и т.д. Этим недостаткам лишены непрерывные методы моделирования топографической поверхности, к которым относится аппроксимация топографической поверхности с помощью дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки на основе полиномов Бернштейна в БН-исчислении [26, с. 227; 37, с. 236].

Первой из диссертационных работ в данном направлении была работа Кучеренко В.В. [41, с. 234], который применил методы БН-исчисления для геометрического моделирования микрорельефа земельного участка, разработал способ геометрического моделирования нерегулярных поверхностей, исходными данными для которых является дискретное конечное множество точек, полученное в результате наземного лазерного сканирования микрорельефа земельного участка. В этой же работе был предложен метод «Лупа», сущность которого заключается в том, что вся поверхность земельного участка делится на 9-точечные сегменты, которые определяются имеющейся сеткой в плане, то

есть или прямолинейные с равномерным и неравномерным шагом, или криволинейные с неравномерным шагом и таким, что меняется в пределах одной полосы. При этом, количество ячеек, которые будут входить в состав сегмента, на который наведен «Лупа», будет зависеть от порядка кривых, ограничивающих этот сегмент. В качестве таких кривых, рассмотрены параболы второго порядка, которые определяются тремя точками. Исходя из сказанного, с использованием в качестве ребер сегмента парабол 2-го порядка, предложенных в [105], минимальное количество узловых точек облака, необходимых для применения способа «Лупа», девять. Он был использован для восстановления потерянной информации в результате удаления избыточной информации полученной с помощью НЛС (наземное лазерное сканирование [106]).

Вообще работу Кучеренко В.В. можно условно разделить на две части:

1) удаление избыточной информации из гиперколичественного множества точек, полученной в результате съёмки участка топографической поверхности НЛС;

2) реконструкция микрорельефа местности способом «Лупа» после предварительной обработки гиперколичественного множества точек.

Основой для реконструкции микрорельефа местности способом «Лупа» послужило следующее точечное уравнение 9-титочечного отсека параболической поверхности (геометрическая схема конструирования представлена на рисунке 2):

$$\begin{aligned}
 M = & \left[A_1\bar{u}(1-2u) + 4A_2u\bar{u} + A_3u(2u-1) \right] \bar{v}(1-2v) + \\
 & + 4 \left[B_1\bar{u}(1-2u) + 4B_2u\bar{u} + B_3u(2u-1) \right] v\bar{v} + \\
 & + \left[C_1\bar{u}(1-2u) + 4C_2u\bar{u} + C_3u(2u-1) \right] v(2v-1).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Следует отметить, что в работе [57, с. 234] доказаны преимущества метода реконструкции участка топографической поверхности по сравнению с существующими методами. В частности этот метод даёт значительную экономию временных и вычислительных ресурсов, не теряя при этом необходимой точности. Однако использование только параболической интерполяции для реконструкции участка топографической поверхности не может в полной мере раскрыть все возможности предложенного метода. Поэтому перспективным

направлением дальнейших исследований можно считать развитие метода «Луца» как в сторону увеличения количества исходных для реконструкции точек, так и в сторону применения других кривых 2-го порядка (к2п) в качестве исходного носителя интерполяции.

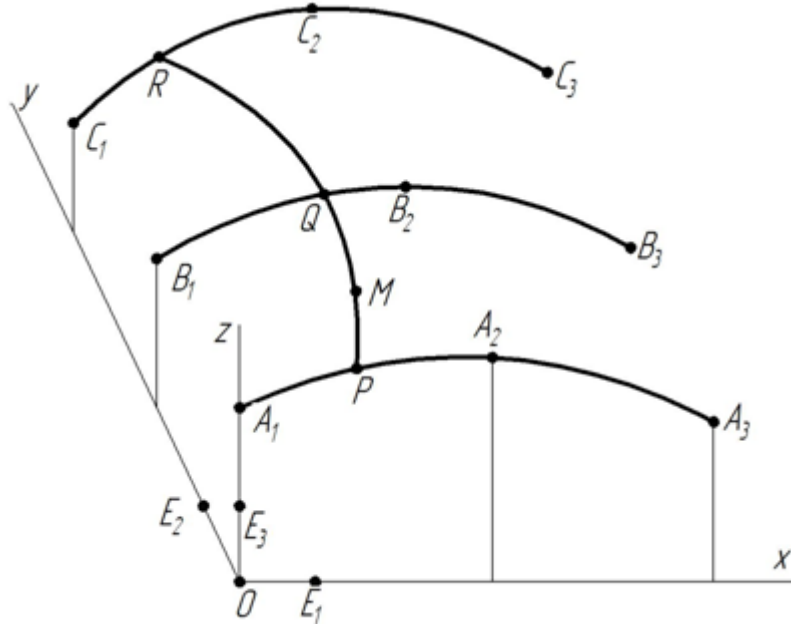


Рисунок 2 – Геометрическая схема конструирования отсека параболической поверхности, проходящий через 9-ть наперёд заданных точек

1.3 Анализ существующих способов вертикальной планировки участка топографической поверхности

В практике инженерно-геодезических работ одной из широко распространенных задач является определение объемов земляных работ при планировке земной поверхности. Это обусловлено широким применением вертикальной планировки в строительной практике при строительстве дорог, аэродромов, детальной планировки и застройки района города, территории микрорайонов, зеленых массивов, транспортных путей и т.п.

Вертикальная планировка осуществляется с наибольшим сохранением естественного рельефа и с наименьшим объемом земляных работ. Традиционно для проведения каких-либо работ на местности в первую очередь необходимо изучить ее поверхность, для чего производятся на этой поверхности измерения,

их математическая обработка и составление планов, карт, профилей, которые являются конечной продукцией геодезического производства. Таким образом, вертикальную планировку можно отнести к оптимизационным задачам по минимизации объема земляных работ при строительстве инженерных сооружений.

В практике проектирования в основном используются три геодезических метода вертикальной планировки [107, 108]:

- проектных (красных) горизонталей (Рисунок 3);
- продольных и поперечных профилей (Рисунок 4);
- проектных (красных) отметок (Рисунок 5).

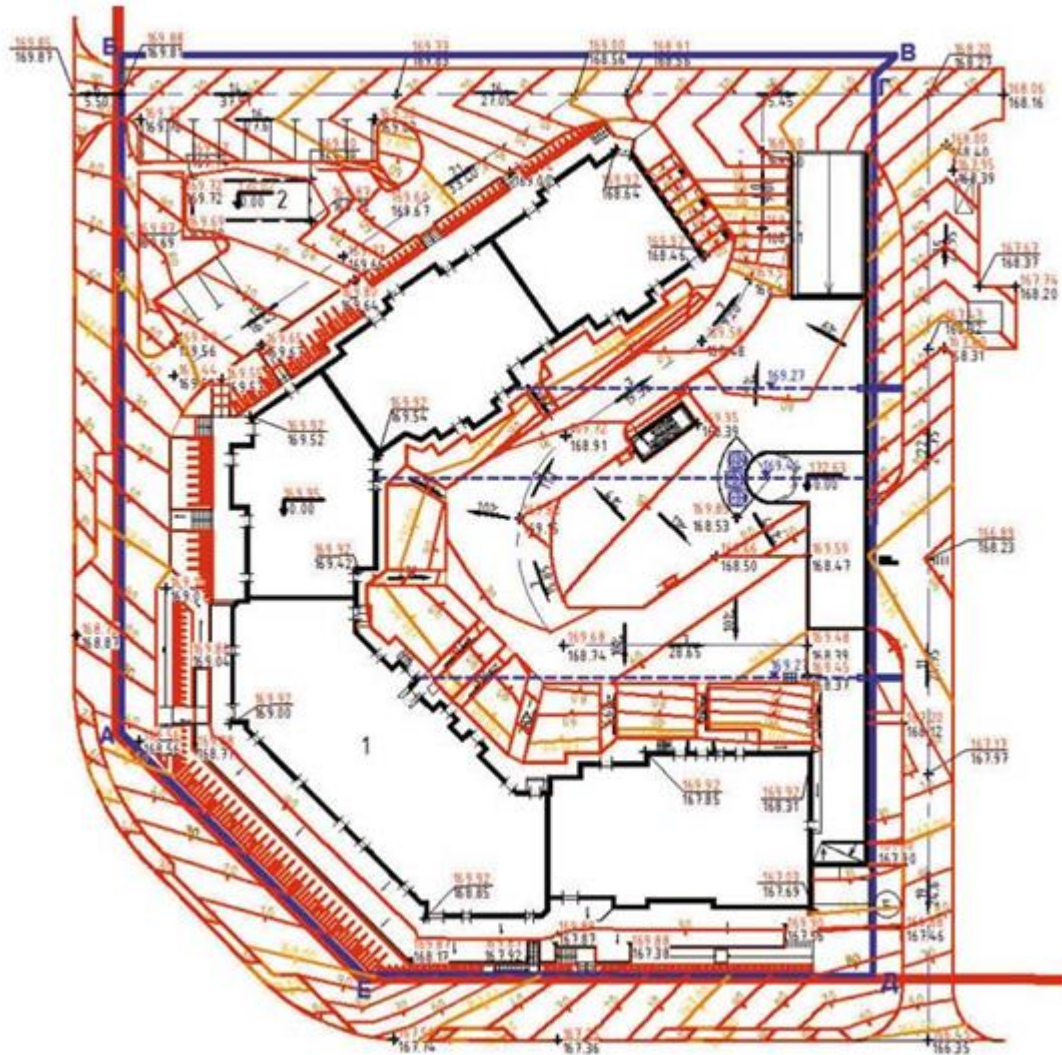


Рисунок 3 – Метод проектных горизонталей

Метод проектных горизонталей (Рисунок 3) применяется при разработке детальныx проектов вертикальной планировки улиц, площадей, территорий микрорайонов, промышленных площадок, зеленых массивов и т.д. Сущность метода проектных горизонталей заключается в том, что на план с геодезической подосновой, где показан существующий рельеф и нанесены все проектные решения в плане – здания, сооружения и т.п., наносят горизонтали, изображающие проектный рельеф в виде прямых параллельных линий. Данный метод позволяет изобразить вертикальную планировку в проектных горизонталях, охватить всю площадь видоизмененного рельефа, отобразить в плане пластику рельефа на всей проектируемой территории, определить проектную отметку в любой точке плоскости рельефа методом линейной интерполяции, а также рабочие отметки, а, следовательно, участки срезки и подсыпки грунта [107, с. 240; 108, с. 119].

Существенным недостатком метода проектных горизонталей является сложность определения объема земляных работ и невозможность даже ориентировочной его оценки по ходу проектирования рельефа.

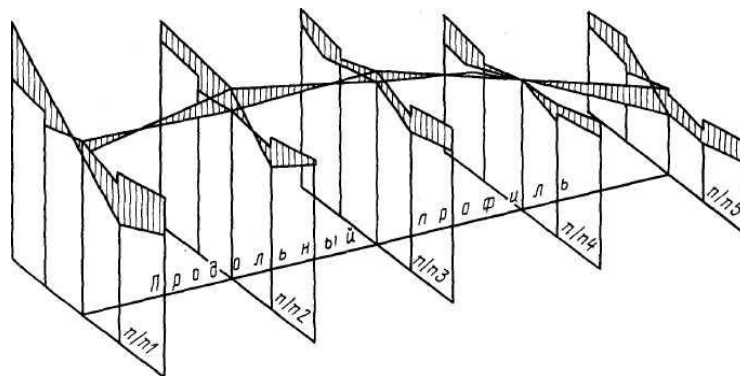


Рисунок 4 – Метод проектных профилей

Метод проектных (продольных и поперечных) профилей (Рисунок 4) используют для вертикальной планировки рельефа под линейные сооружения автомобильных и железных дорог, трамвайных путей, подземных сетей, при планировке отдельных участков территории. Он заключается в разработке продольного профиля участка или улицы и построении поперечных профилей

через определённый интервал. Профили представляют собой условные размеры существующей и проектируемой поверхностей в рассматриваемых сечениях.

Несмотря на то, что каждый профиль в отдельности дает достаточно четкое представление об изменении рельефа в пределах линии, по которой он построен, для восприятия характера планируемой поверхности между профилями нужно пользоваться одновременно несколькими чертежами – планом и совокупностью профилей [107, с. 240; 108, с. 119].

Обилие графических материалов, которыми приходится одновременно пользоваться при достаточно большой густоте сетки профилей, существенно снижает наглядность этого способа. Этот недостаток в некоторой степени компенсируется удобством определения объема земляных работ, которые могут быть вычислены непосредственно по профилям и контролироваться постоянно в процессе их проектирования. Еще к недостаткам можно отнести малую наглядность общего решения и приближенность решения на сложном рельефе.

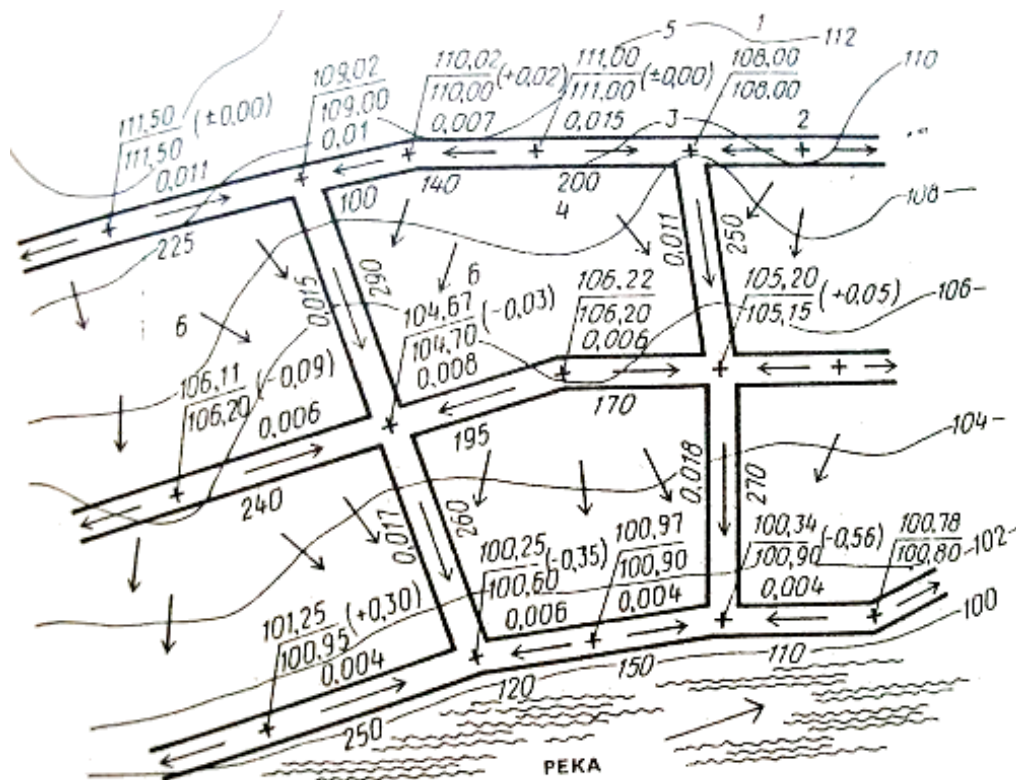


Рисунок 5 – Метод проектных (красных) отметок

Метод проектных (красных) отметок (Рисунок 5) заключается в нанесении проектных отметок в характерных точках на схеме генерального плана, выполненном на топографической подоснове. Применяется на предварительных этапах проектирования, когда определяют принципиальное высотное решение уличной сети, а также при детальной вертикальной планировке. Этот метод дает возможность определить превышения, уклон, высотное положение проектируемого рельефа. Сущность метода заключается в отображении существующего рельефа территории в горизонталях, а в характерных точках – в проектных отметках. Точность подсчета земляных работ зависит от метода их проектирования и линейных размеров самого объекта. Практика показывает, что при методе проектных отметок можно вычислить лишь ориентировочный объем, который допустим при разработке схемы вертикальной планировки и составления сметно-финансового расчета.

Несмотря на наличие классических методов вертикальной планировки, которые в большинстве своём были разработаны не геометрами, а специалистами в области геодезии, широкое распространение получили инновационные методы, использующие инструменты от начертательной до вычислительной геометрии.

Значительный вклад в развитие вопроса определения объемов земляных работ внесли отечественные учёные. Среди них Видуев Н.Г. [23, с. 252], который занимался геодезическим проектированием при вертикальной планировке и впервые обосновал классификацию геометрических условий инженерного проектирования при вертикальной планировке, которые должны соблюдаться и при проектировании земляных сооружений. Галясовский И.В. [24, с. 16], который разрабатывал геометрические основы теории топографических поверхностей при подсчете объемов земляных работ и исследовал подсчет объемов земляных работ способом начертательной геометрии заключающийся в топологическом отображении объема топографического тела на плоскость и геометрические величины, влияющие на этот подсчет.

Однако, со стремительным развитием информационных технологий, появилась возможность использования методов непрерывной и дискретной

геометрии для аналитического описания ЦМР местности и подсчёта объёмов на их основе, что значительно повысило точность вычислений. Причём каждый новый способ построения ЦМР предполагает свои способы решения задач вертикальной планировки. Среди таких работ можно выделить работу Иевлевой О.Т. [17, с. 73; 18, с. 86-87], которая частично касалась вопросов вертикальной планировки, при разработке методологии автоматизированного решения геометрических задач архитектурного проектирования. В работе Дранишникова Ю.А. [25, с. 32] предложены теоретические основы и методы проектирования рельефа, лётных полей аэродромов с применением ЭЦВМ.

Несмотря на большое количество научных исследований по данной тематике, задачи вертикальной планировки до сих пор решаются геодезическими методами на основе линейной интерполяции. Причём высокая точность полученных результатов достигается путём уменьшения сетки квадратов, что ведет к значительному увеличению количества вычислительных операций. Другим недостатком, характерным для решений поставленной задачи с применением информационных технологий, является большое количество итераций, которые необходимы для соблюдения баланса земляных работ.

1.4 Обоснование выбора БН-исчисления для создания вычислительных алгоритмов участка нерегулярной поверхности

Составление вычислительных, а вместе с ними и компьютерных, алгоритмов всегда основывается на аналитическом их описании. Для аналитического описания геометрических алгоритмов моделирования участка нерегулярной поверхности в работе используется математический аппарат – БН-исчисление [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42].

Основной элемент БН-исчисления – это точка, которая характеризуется некоторыми параметрами, определяющими её положение в пространстве. Любой геометрический объект представляется в виде траектории движения текущей точки, которая, заполняя собой пространство, этот объект и порождает. Причём количество текущих параметров, определяющих закон движения точки,

предопределяет вид геометрического объекта. Это эффективно используется при конструировании геометрических объектов с наперед заданными свойствами. Например, прохождение отсека поверхности через наперед заданные точки, обеспечивается прохождением направляющих линий через выше упомянутые точки. При этом, текущие точки направляющих линий являются одновременно и исходными для построения образующей линии, которая также определяется текущей точкой.

Важная особенность БН-исчисления – возможность покоординатного расчета, что позволяет аналитически представить геометрический объект в виде совокупности проекций на оси глобальной системы координат, которые аналитически описываются с помощью однотипных параметрических уравнений, что обеспечивается инвариантными свойствами параметра БН-исчисления по отношению к параллельному проецированию. Выделим основные преимущества БН-исчисления:

1. В БН-исчислении основной элемент – точка, которая характеризуется несколькими параметрами. А любой геометрический объект представляется как упорядоченное множество точек.

2. Точечные уравнения геометрических объектов инвариантны по отношению к размерности пространства глобальной системы координат. То есть в качестве параметров выбираются такие параметры, которые являются инвариантными относительно параллельного проецирования (например, простое отношение трех точек прямой).

3. БН-исчисление позволяет работать в локальном симплексе, а результат получать в глобальном симплексе. Причем переход от локального симплекса к глобальному осуществляется автоматически. Это важнейшее с практической точки зрения свойство обеспечивается совместным выполнением перечисленных выше преимуществ.

4. В БН-исчислении каждой геометрической операции соответствует аналитическая операция. Таким образом, БН-исчисление позволяет представить любой геометрический алгоритм построения объекта в аналитическом виде, или в

виде точечного уравнения, или в виде вычислительного алгоритма, который, по сути, является упорядоченным множеством точечных уравнений. Поэтому в точечных уравнениях сохраняется наглядный геометрический смысл параметров, который известен из геометрического алгоритма построения объекта.

5. Точечные уравнения, по сути, являются символьной записью. Переходя к глобальной декартовой системе координат точечные уравнения, заменяются на систему однотипных параметрических уравнений, количество которых зависит от размерности пространства глобальной системы координат. Поэтому точечные уравнения и вычислительные алгоритмы на их основе не только легко программируются на ЭВМ, но и позволяют использовать многопоточные вычислительные возможности центрального процессора для ускорения вычислительных операций.

6. В БН-исчислении разработан специальный метод подвижного симплекса, который позволяет конструировать геометрические объекты любой сложности с наперед заданными характеристиками, что эффективно используется для геометрического и компьютерного моделирования нелинейных топографических поверхностей, проходящих через наперед заданные точки.

Таким образом, учитывая все выше изложенные преимущества, выберем в качестве математического аппарата моделирования нелинейных топографических поверхностей БН-исчисление.

ВЫВОДЫ ПО ПЕРВОМУ РАЗДЕЛУ

1. Выполненный анализ существующих способов создания ЦМР показал, наличие как общих, так и частных недостатков, главным из которых является большой объём вычислений, необходимый для точной передачи нелинейной формы рельефа местности. Исходя из этого разработку новых инструментов ЦМР, полученных на основе точечных уравнений, которые могли бы охватить большее количество исходных точек, можно считать актуальной научно-практической задачей.

2. Установлено, что вычислительные методы при моделировании и реконструкции рельефа местности, имеют преимущество в быстродействии над численными методами, применяемыми для решения аналогичных задач, при сохранении необходимой точности. Предложено усовершенствовать метод параболической интерполяции путём увеличения количества исходных точек, а также путём использования других дуг к2п (эллипс, гипербола), что позволит значительно расширить возможности практического использования предложенного метода.

3. Проведен анализ методов вертикальной планировки участка топографической поверхности, который вскрыл ряд недостатков существующих методов и подтвердил необходимость проведения дальнейших исследований в данном направлении.

4. Обоснован выбор математического аппарата БН-исчисления для создания вычислительных алгоритмов определения участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков.

РАЗДЕЛ 2

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ УЧАСТКА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Компьютер оперирует числами. Поэтому для построения цифровых моделей рельефа местности возникает необходимость представления геометрических построений в виде последовательности математических операций. БН-исчисление позволяет решить эту задачу, используя алгоритмы графического построения геометрических объектов. Результатом такого моделирования будут точечные уравнения или последовательности точечных уравнений в виде вычислительных алгоритмов моделирования. Чтобы качественно аппроксимировать незакономерную криволинейную форму участка топографической поверхности с помощью отсеков поверхности, проходящих через наперёд заданные точки, необходимо иметь специальный набор дуг алгебраических кривых, также проходящих через наперёд заданные точки.

2.1 Реконструкция топографической поверхности на основе кривых 2-го порядка, проходящих через 3 наперед заданные точки

Кривые 2-го порядка ($k_2п$) получили широкое распространение в инженерной практике благодаря простоте задания и использования. Их свойства были предметом изучения учёных на протяжении более чем 2000 лет, со времён Менехма и на данный момент накопился огромный пласт знаний, который позволяет использовать $k_2п$ для решения самых разнообразных технических задач. Моделирование ЦМР также не является исключением. Рассмотрим способы моделирования отсека топографической поверхности на основе $k_2п$, которые могут быть эффективно использованы в тех случаях, когда метод линейной интерполяции не даёт необходимой точности в расчётах. В БН-исчислении накоплена достаточно большая библиотека дуг $k_2п$ в различных параметризациях, которая получило частичное отражение в работах [26, с. 227; 35, с. 164; 38, с. 186; 39, с. 164].

2.1.1 Использование параболической интерполяции для моделирования отсека топографической поверхности

Для использования параболической интерполяции необходимо иметь точечное уравнение параболической дуги, проходящей через наперёд заданные точки. Рассмотрим подробно геометрический алгоритм построения параболической дуги 2-го порядка, приведенный в работе [35, с. 164].

Известно, что парабола 2-го порядка однозначно определяется четырьмя точками. Определим дугу параболы в симплексе ABC (Рисунок 6). В соответствии с геометрической схемой, дуга параболы будет проходить через точки A, C_∞, C, B . Точка C_∞ является несобственной и определяет направление

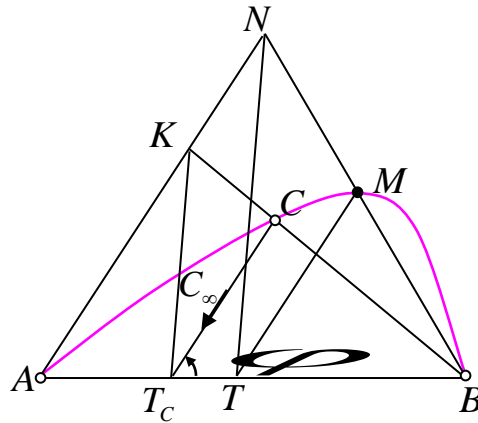


Рисунок 6 – Геометрическая схема моделирования параболической дуги веток параболы

Несобственную точку C_∞ определим как направление прямой CT_C :

$$T_C = (B - A)t_c + A. \quad (2)$$

В соответствии с геометрической схемой (Рисунок 6) прямые AK и $T_C C$ параллельны. Тогда треугольники ABK и BCT_C аффинно-равны и образуют соответствующие соотношения:

$$t_c = \frac{T_C A}{BA} = \frac{CK}{BK} \rightarrow \frac{C - K}{B - K} = t_c \rightarrow K = B \frac{-t_c}{\bar{t}_c} + C \frac{1}{\bar{t}_c}, \quad (3)$$

где $\bar{t}_c = 1 - t_c$.

В качестве текущего параметра принимаем параметр t , который определяется следующим соотношением:

$$t = \frac{TA}{BA} \rightarrow \frac{T-A}{B-A} = t \rightarrow T = (B-A)t + A. \quad (4)$$

Согласно геометрической схемы (рисунок б) прямые KT_C и TN параллельны. Учитывая, что треугольники AKT_C и ATN аффинно-равны, получим следующие соотношения:

$$\frac{KT_C}{NT} = \frac{T_C A}{TA}. \quad (5)$$

Из соотношения (5) определим точку N :

$$\begin{aligned} \frac{K-T_C}{N-T} &= \frac{T_C-A}{T-A}, \\ N &= \frac{(K-T_C)(T-A)}{T_C-A} + T. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляем значения точек K, T и T_C в уравнение (6) и после определенных преобразований, получим уравнение точки N :

$$N = A \frac{(t_c - t)}{t_c} + B \frac{-t}{\bar{t}_c} + C \frac{t}{t_c \bar{t}_c}. \quad (7)$$

Или в другом виде:

$$N = (A-C) \frac{(t_c - t)}{t_c} + (B-C) \frac{-t}{\bar{t}_c} + C. \quad (8)$$

Аналогично треугольники ABN и BTM подобны. Исходя из этого, получим следующее соотношение:

$$\frac{TB}{AB} = \frac{MB}{NB}. \quad (9)$$

Подставляем значения точек N и T в соотношение (9) и после некоторых преобразований, получим уравнение точки M :

$$\begin{aligned} \frac{T-B}{A-B} &= \frac{M-B}{N-B}, \\ M &= A \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C \frac{t\bar{t}}{t_c \bar{t}_c}. \end{aligned} \quad (10)$$

Утверждение. Дуга параболы 2-го порядка, которая определяется точками A, C_∞, C, B , описывается уравнением:

$$\begin{aligned} M &= A \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + B \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C \frac{t\bar{t}}{t_c \bar{t}_c} = \\ &= (A - C) \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + (B - C) \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + C. \end{aligned} \quad (11)$$

где A, C, B – точки, через которые проходит дуга параболы;

$0 \leq t \leq 1$ – параметр, который определяет дугу параболы;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра t до единицы;

t_c – значение параметра, который определяет несобственную точку дуги параболы;

$\bar{t}_c = 1 - t_c$ – дополнение параметра t_c до единицы.

Представим уравнение (11) в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x_M &= (x_A - x_C) \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + (x_B - x_C) \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + x_C, \\ y_M &= (y_A - y_C) \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + (y_B - y_C) \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + y_C, \\ z_M &= (z_A - z_C) \frac{\bar{t}(t_c - t)}{t_c} + (z_B - z_C) \frac{t(t - t_c)}{\bar{t}_c} + z_C, \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

При практическом применении полученное уравнение можно упростить, если принять параметр $t_c = \frac{1}{2}$. Это позволяет наилучшим образом приспособить точку C_∞ к дискретной выпуклости. Тогда уравнение (11) принимает следующий вид:

$$M = (A - C)\bar{t}(1 - 2t) + (B - C)t(2t - 1) + C. \quad (13)$$

Представим полученное уравнение в параметрической форме, выполнив по координатный расчёт:

$$\begin{aligned}
x_M &= (x_A - x_C)\bar{t}(1 - 2t) + (x_C - x_B)t(1 - 2t) + x_C, \\
y_M &= (y_A - y_C)\bar{t}(1 - 2t) + (y_C - y_B)t(1 - 2t) + y_C, \\
z_M &= (z_A - z_C)\bar{t}(1 - 2t) + (z_C - z_B)t(1 - 2t) + z_C,
\end{aligned}
\tag{14}$$

...

Воспользуемся точечным уравнением параболической дуги (13) для моделирования 9-точечного отсека топографической поверхности. Геометрическая план-схема отсека регулярной топографической поверхности предусматривает организацию 9-ти исходных точек сети в виде 3-х плоских сечений по 3 точки в каждом. Направляющие линии такой поверхности определяются следующими точечными уравнениями.

$$\begin{aligned}
M_1 &= A_{00}\bar{\tau}(1 - 2\tau) + 4\bar{\tau}\tau A_{01} + A_{02}\tau(2\tau - 1), \\
M_2 &= A_{10}\bar{\tau}(1 - 2\tau) + 4\bar{\tau}\tau A_{11} + A_{12}\tau(2\tau - 1), \\
M_3 &= A_{20}\bar{\tau}(1 - 2\tau) + 4\bar{\tau}\tau A_{21} + A_{22}\tau(2\tau - 1),
\end{aligned}
\tag{15}$$

где M_i – текущие точки направляющих дуг кривых отсека поверхности;

A_{ij} – исходные точки отсека топографической поверхности;

t – текущий параметр точечного уравнения, который изменяется от $0 \leq t \leq 1$;

$\bar{t} = 1 - t$ – дополнение параметра до 1.

Формируя подвижный симплекс $M_1M_2M_3$, получим точечное уравнение образующей отсека топографической поверхности:

$$M = M_1\bar{\tau}(1 - 2\tau) + 4\bar{\tau}\tau M_2 + M_3\tau(2\tau - 1), \tag{16}$$

где $0 \leq \tau \leq 1$.

В результате получим последовательность точечных уравнений, с помощью которых описывается сегмент топографической поверхности, который определяется 9-ю точками с помощью параболической интерполяции. Воспользуемся программным пакетом Maple для визуализации отсека топографической поверхности, полученной на основе параболической интерполяции (Рисунок 7).

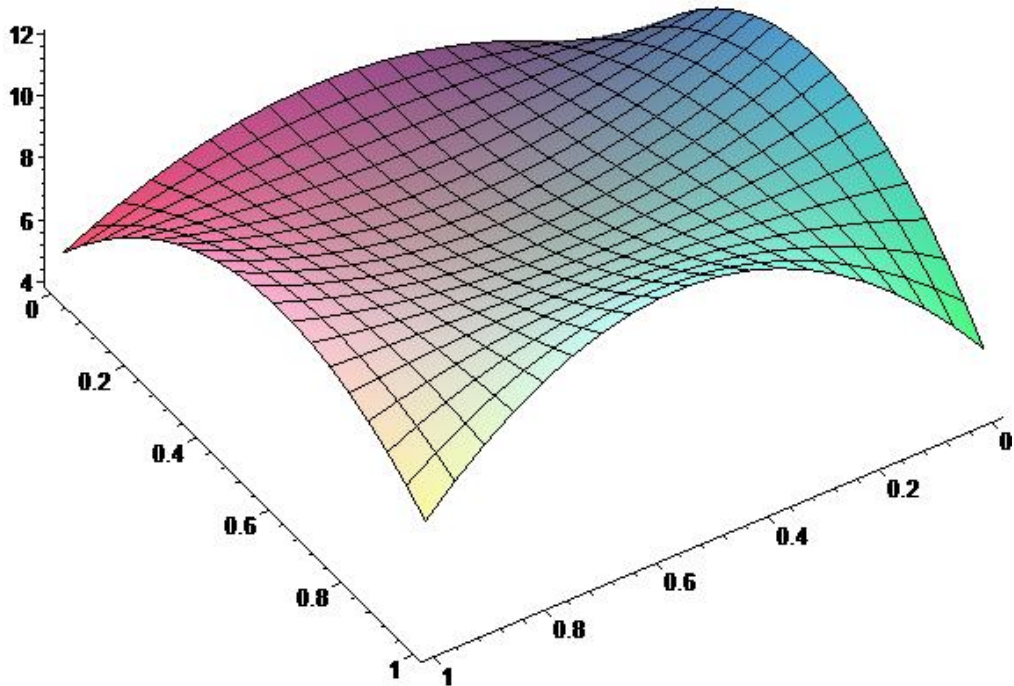


Рисунок 7 – Визуализация геометрической модели отсека топографической поверхности на основе параболической интерполяции

Следует отметить, что для описания как направляющих линий, так и образующей используется одно и то же уравнение параболы 2-го порядка, проходящей через 3 наперед заданные точки. При этом в уравнении меняются только координаты исходных точек и параметры. Представленная выше последовательность точечных уравнений была получена Кучеренко В.В. в диссертационной работе на соискание учёной степени кандидата технических наук и эффективно использована для реконструкции участка топографической поверхности на основе дискретно-заданного массива точек под именем «Луца». Этот метод использует для описания топографической поверхности дугу параболы второго порядка, которая определяется тремя точками. За основу берутся 9 точек топографической поверхности, которые представлены как 3 опорных дуги параболы второго порядка, по которым течёт также дуга параболы. Для описания всей топографической поверхности достаточно перебрать все известные точки топографической поверхности каждый раз выбирая новые 9 точек для её описания.

Далее рассмотрим использование параболической интерполяции в случае, когда исходные данные заданы на топографической карте или плане. В таких случаях удобно использовать проекции с числовыми отметками [109].

Определим высотные отметки дискретно заданной топографической поверхности. Пусть дана сеть в плане в виде четырех прямоугольников со сторонами a и b (Рисунок 8). В каждой вершине сети известна высотная отметка: $A_{ij} \rightarrow a_{ij}$.

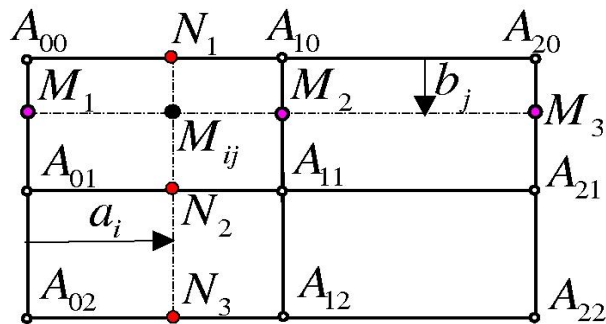


Рисунок 8 – Геометрическая план-схема моделирования 9-точечного отсека топографической поверхности

В соответствии с рисунком 8, определим следующие координаты узлов сети: $A_{00}(0,0,a_{00})$, $A_{10}(a,0,a_{10})$, $A_{20}(2a,0,a_{20})$, $A_{01}(0,b,a_{01})$, $A_{11}(a,b,a_{11})$, $A_{21}(2a,b,a_{21})$, $A_{02}(0,2b,a_{02})$, $A_{12}(a,2b,a_{12})$, $A_{22}(2a,2b,a_{22})$.

Как было сказано выше, для параболической интерполяции топографической поверхности поочередно берутся девять её точек. При этом три тройки точек: $A_{00}A_{01}A_{02}$, $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$ составляют три опорных контура, через которые проводится дуга параболы 2-го порядка. Таким образом, получим три текущие точки, расположенные на прямом плане (заложения), которые образуют криволинейный профиль, $M_1M_2M_3$, на котором, в свою очередь, находится текущая точка M_{ij} с высотной отметкой m_{ij} .

Построение профиля $A_{00}A_{01}A_{02}$.

Представим уравнение кривой профиля в виде параболы 2-го порядка [105, с. 49-52], проходящей через три точки (Рисунок 9):

$$M_1 = (A_{00} - A_{01})\bar{u}(1 - 2u) + (A_{01} - A_{02})u(1 - 2u) + A_{01}, \quad (17)$$

где $0 \leq u \leq 1$.

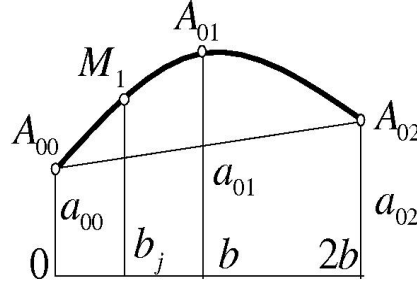


Рисунок 9 – Параболический профиль 9-точечного отсека поверхности

Поскольку данное уравнение принадлежит точечному исчислению, то оно справедливо для координат точек:

$$b_j = (0 - b)\bar{u}(1 - 2u) + (b - 2b)u(1 - 2u) + b. \quad (18)$$

и:

$u = \frac{b_j}{2b}$. Тогда точечные уравнения опорной дуги $A_{00}A_{01}A_{02}$, принимают вид:

$$M_1 = (A_{00} - A_{01})\left(1 - \frac{b_j}{2b}\right)\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + (A_{01} - A_{02})\frac{b_j}{2b}\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + A_{01}. \quad (19)$$

Аналогичным образом определяем опорные дуги $A_{10}A_{11}A_{12}$ и $A_{20}A_{21}A_{22}$:

$$\begin{aligned} M_2 &= (A_{10} - A_{11})\left(1 - \frac{b_j}{2b}\right)\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + (A_{11} - A_{12})\frac{b_j}{2b}\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + A_{11}, \\ M_3 &= (A_{20} - A_{21})\left(1 - \frac{b_j}{2b}\right)\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + (A_{21} - A_{22})\frac{b_j}{2b}\left(1 - \frac{b_j}{b}\right) + A_{21}. \end{aligned} \quad (20)$$

Формируя подвижный симплекс $M_1M_2M_3$, получим точечное уравнение сегмента топографической поверхности:

$$M_{ij} = (M_1 - M_3)(1 - v)(1 - 2v) + (M_2 - M_3)v(1 - 2v) + M_3. \quad (21)$$

По аналогии с соотношением (18) определим значение параметра $v = \frac{a_i}{2a}$.

Подставив его в уравнение (21), получим:

$$M_{ij} = (M_1 - M_3)\left(1 - \frac{a_i}{2a}\right)\left(1 - \frac{a_i}{a}\right) + (M_2 - M_3)\frac{a_i}{2a}\left(1 - \frac{a_i}{a}\right) + M_3. \quad (22)$$

Этим уравнением описывается отсек параболической поверхности, который определяется 9-ю наперёд заданными точками. Таким образом, можно определить высотную отметку в любой точке топографической поверхности, используя в качестве исходных данных карту или план местности. Следует отметить, что в соответствии с рисунком 8 можно было бы задавать опорные контуры не только текущими точками M_1 , M_2 и M_3 , но и используя текущие точки N_1 , N_2 и N_3 . При этом ход решения задачи и результат её решения будут аналогичными.

2.1.2 Использование эллиптической и гиперболической интерполяции для моделирования отсека топографической поверхности

Обобщим предложенный выше способ реконструкции участка топографической поверхности для всех кривых 2-го порядка. Для этого воспользуемся точечным уравнением дуги кривой 2-го порядка, которая проходит через 3 наперёд заданные точки и имеет касательные в начальной и конечной точках.

В соответствии с [36, с. 210-215] задан геометрический алгоритм построения дуги обвода к2п отношением на медиане, которая имеет следующее точечное уравнение:

$$M = (A - C) \frac{k\bar{t}^2}{k(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + (B - C) \frac{kt^2}{k(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + C, \quad (23)$$

где $t = \frac{AT}{AB}$, $k = \frac{KC}{K_C C}$, $K_C = \frac{A + B}{2}$.

Требуется заменой симплекса преобразовать это уравнение дуги к2п таким образом, чтобы она проходила через 3 наперёд заданные точки: A , K и B (Рисунок 10).

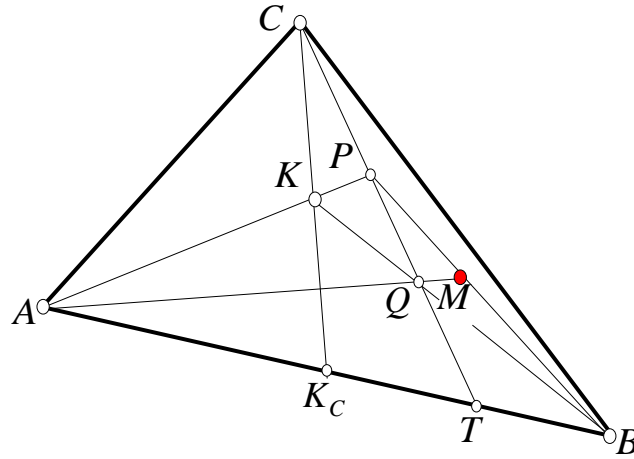


Рисунок 10 – Геометрическая схема конструирования дуги к2п

В соответствии с геометрической схемой конструирования дуги кривой к2п (Рисунок 10), определим точку C из следующего соотношения:

$$k = \frac{KC}{K_c C} \rightarrow C\bar{k} = K - K_c k.$$

Далее подставим в уравнение точку K_c :

$$C = K \frac{1}{\bar{k}} - \frac{A+B}{2} \frac{k}{\bar{k}} = -A \frac{k}{2\bar{k}} - B \frac{k}{2\bar{k}} + K \frac{1}{\bar{k}}. \quad (24)$$

Произведём замену симплекса в уравнении (23), подставив вместо точки C уравнение (24). После некоторых преобразований, получим:

$$M = (A - K) \frac{k\bar{t}(1-2t)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (B - K) \frac{kt(2t-1)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + K. \quad (25)$$

Переходя от точечных уравнений к параметрическим для 3-мерного пространства, получим:

$$\begin{cases} x_M = (x_A - x_K) \frac{k\bar{t}(1-2t)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (x_B - x_K) \frac{kt(2t-1)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + x_K. \\ y_M = (y_A - y_K) \frac{k\bar{t}(1-2t)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (y_B - y_K) \frac{kt(2t-1)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + y_K. \\ z_M = (z_A - z_K) \frac{k\bar{t}(1-2t)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + (z_B - z_K) \frac{kt(2t-1)}{k(1-2t)^2 + 2t\bar{t}} + z_K. \end{cases} \quad (26)$$

Следует отметить, что геометрические свойства дуги кривой, несмотря на замену точек в уравнении, полностью сохранились и в соответствии с [36, с. 210-215] при $k = \frac{1}{2}$ получим дугу параболы, при $k > \frac{1}{2}$ – дугу эллипса, а при $k < \frac{1}{2}$ – дугу гиперболы. При таком подходе возникает возможность регулирования кривизны каждой отдельной направляющей и образующей с помощью изменения значения параметра $k \in [0; 1]$.

Определим из точечного уравнения (25) уравнение дуги параболы. Для этого принимаем $k = \frac{1}{2}$. После некоторых преобразований получим:

$$M = (A - K)\bar{t}(1 - 2t) + (B - K)t(2t - 1) + K. \quad (27)$$

Таким образом, получим точечное уравнение, которое полностью совпадает с уравнением (13). Что говорит не только об инвариантных свойствах БН-исчисления как аппарата геометрического моделирования дуг алгебраических кривых, но и том, что полученные уравнения описывают одну и ту же параболическую дугу в одном и том же симплексе, и геометрические свойства обеих дуг являются взаимозаменяемыми.

Обобщим предложенный выше способ реконструкции участка топографической поверхности на основе параболической интерполяции для всех кривых 2-го порядка. Для этого воспользуемся точечным уравнением дуги кривой 2-го порядка, которая проходит через 3 наперед заданные точки и имеет касательные в начальной и конечной точках:

$$\left[\begin{array}{l} M_1 = (A_{00} - A_{01}) \frac{k_1 \bar{t}(1 - 2t)}{k_1(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + (A_{02} - A_{01}) \frac{k_1 t(2t - 1)}{k_1(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + A_{01}, \\ M_2 = (A_{10} - A_{11}) \frac{k_2 \bar{t}(1 - 2t)}{k_2(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + (A_{12} - A_{11}) \frac{k_2 t(2t - 1)}{k_2(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + A_{11}, \\ M_3 = (A_{20} - A_{21}) \frac{k_3 \bar{t}(1 - 2t)}{k_3(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + (A_{22} - A_{21}) \frac{k_3 t(2t - 1)}{k_3(1 - 2t)^2 + 2t\bar{t}} + A_{21}, \\ M = (M_1 - M_2) \frac{k_4 \bar{t}(1 - 2\tau)}{k_4(1 - 2\tau)^2 + 2\tau\bar{\tau}} + (M_3 - M_2) \frac{k_4 \tau(2\tau - 1)}{k_4(1 - 2\tau)^2 + 2\tau\bar{\tau}} + M_2, \end{array} \right. \quad (28)$$

где k_i – отношение на медиане для определения направляющих дуг и образующей дуги отсека топографической поверхности.

Таким образом, получим вычислительный алгоритм моделирования отсека топографической поверхности, проходящей через 9-ть наперёд заданных точек. В самом общем случае, отношение на медиане k_i может принимать любые значения в пределах $0 \leq k_i \leq 1$ и позволяет для каждой отдельной дуги использовать своё уравнение. При этом каждой дуге кривой будет свойственная своя кривизна. Например, дуга M_1 может быть эллиптической, M_2 – параболической, а M_3 – гиперболической. Или все три направляющих дуги могут быть эллиптическими, но с разными значениями кривизны. То же самое касается и образующей.

2.2 Реконструкция отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперёд заданных точек, с помощью модифицированного уравнения дуги кривой Безье 3-го порядка

Представленные выше способы могут быть эффективно использованы для моделирования участка топографической поверхности, состоящей из 9-точечных отсеков, на основе регулярной сети точек. Однако на нерегулярной сети точек такой способ моделирования не может быть использован без предварительной обработки данных, поскольку он основывается на построении отсека поверхности на плоских направляющих дуг кривых 2-го порядка. Для выполнения поставленных в работе задач необходима линия двойкой кривизны, т.е. дуга пространственной кривой. Наиболее простой из пространственных кривых, обладающих необходимыми свойствами, является дуга кривой Безье 3-го порядка, которая в БН-исчислении получила название параболы 3-го порядка.

2.2.1 Общий подход к конструированию дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки, на основе полиномов Бернштейна

Для геометрического моделирования топографической поверхности нужно иметь специальный набор дуг кривых, проходящих через наперёд заданные точки. В работе [39, с. 164] был предложен способ определения дуги кривой 2-го порядка, проходящей через 3 наперед заданные точки и имеющей 2 касательные. Обобщим этот способ для кривых n -го порядка, проходящих через $n+1$ точку на основе полиномов Бернштейна.

Пусть задана ломаная линия $A_1A_2\dots A_n, A_{n+1}$. Тогда дуга кривой n -го порядка имеет следующее точечное уравнение:

$$M = A_1\bar{u}^n + A_2C_n^1\bar{u}^{n-1}u + A_3C_n^2\bar{u}^{n-2}u^2 + \dots + A_nC_n^{n-1}\bar{u}u^{n-1} + A_{n+1}u^n = \sum_{k=0}^n A_{k+1}C_n^k u^k \bar{u}^{n-k}, \quad (29)$$

где C_n^1, \dots, C_n^k – коэффициенты Бернштейна; $\bar{u} = 1 - u$.

Если $u(t) = t$ и все точки A_i принадлежат одной плоскости, то получим кривую, которую в [32, с. 178-182] названо m -кривой Бернштейна. При $n=3$, кривая Бернштейна превращается в кривую Безье [33, с. 66-67]. В самом общем случае эта кривая $(n-1)$ -й кривизны n -мерного аффинного пространства.

Кривые вида $M = \sum_{k=0}^n A_{k+1}C_n^k t^k \bar{t}^{n-k}$, где $\bar{t} = 1 - t$, которые находятся в пространстве размерности n , в БН-исчислении называются n -параболами. В данном случае текущая точка дуги кривой M определяется точками заданной ломаной $A_1A_2\dots A_n, A_{n+1}$.

Переопределим точки ломаной линии $A_1A_2\dots A_n, A_{n+1}$ через точки $M_1M_2\dots M_n, M_{n+1}$, которые принадлежат дуге кривой, определенной с помощью уравнения (29) при $u(t) = t$, изменяя соответствующим образом значение параметра t от 0 до 1. Так при значении параметра $t=0$ имеем начало дуги кривой – точку M_1 , а при $t=1$ – конец дуги кривой – точку M_{n+1} . Особенностью такого определения является то, что значение параметра распределяется

равномерно: $t_k = \frac{k}{n}$, где k меняется от 0 до n . Причем точке M_k соответствует значение параметра t_k . Таким образом, получим систему $n+1$ уравнений с неизвестными $A_1 A_2 \dots A_n, A_{n+1}$. Решив эту систему уравнений методом Крамера и подставив в исходное уравнение, получим уравнение дуги кривой, проходящей через точки $M_1 M_2 \dots M_n, M_{n+1}$.

2.2.2 Определение дуги кривой 3-го порядка, проходящей через 4 наперед заданные точки

Определим дугу параболы 3-го порядка, проходящую через наперед заданные точки M_1, M_2, M_3, M_4 (Рисунок 11).

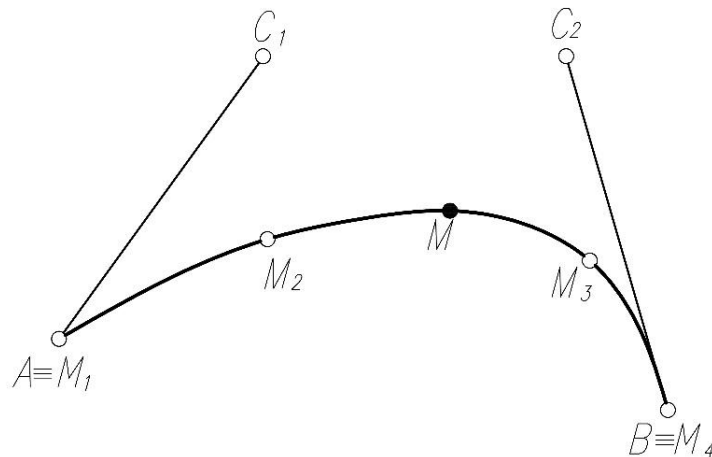


Рисунок 11 – Геометрическая схема моделирования дуги к3п

Дуга параболы 3-го порядка, как дуга кривой Безье 3-го порядка, в соответствии с [33, с. 66-67] определяется следующим точечным уравнением:

$$M = A\bar{t}^3 + 3C_1\bar{t}^2t + 3C_2\bar{t}t^2 + Bt^3, \quad (30)$$

где $\bar{t} = 1 - t$.

Следует отметить, что при значении параметра $t = 0$ кривая проходит через точку $A \equiv M_1$ – начало дуги параболы, при $t = 1$ – через точку $B \equiv M_4$ – конец дуги параболы. Принимаем значение параметра $t = \frac{1}{3}$ при прохождении текущей

точки через точку M_2 и значение $t = \frac{2}{3}$ параметра при прохождении через точку M_3 . Составим следующую систему точечных уравнений:

$$\begin{cases} A = M_1 \\ 8A + 12C_1 + 6C_2 + B = 27M_2 \\ A + 6C_1 + 12C_2 + 8B = 27M_3 \\ B = M_4 \end{cases} \quad (31)$$

Решим эту систему точечных уравнений методом Крамера относительно неизвестных A, C_1, C_2, B . Для этого сначала рассчитываем определитель, который состоит из коэффициентов системы уравнений (31):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 108. \quad (32)$$

Первое и последнее уравнение в системе (31) уже решены, поэтому рассмотрим определители, которые относятся ко второму и третьему элементам системы.

Определим точку C_1 через M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & M_1 & 0 & 0 \\ 8 & 27M_2 & 2 & 1 \\ 1 & 27M_3 & 4 & 8 \\ 0 & M_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -90M_1 + 27 \times 12M_2 - 27 \times 6M_3 + 36M_4. \quad (33)$$

$$C_1 = -\frac{5}{6}M_1 + 3M_2 - \frac{3}{2}M_3 + \frac{1}{3}M_4.$$

Аналогично определим точку C_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & M_1 & 0 \\ 8 & 4 & 27M_2 & 1 \\ 1 & 2 & 27M_3 & 8 \\ 0 & 0 & M_4 & 1 \end{vmatrix} = 36M_1 - 27 \times 6M_2 + 27 \times 12M_3 - 90M_4. \quad (34)$$

$$C_2 = \frac{1}{3}M_1 - \frac{3}{2}M_2 + 3M_3 - \frac{5}{6}M_4.$$

Подставив уравнение (31), (33) и (34) в уравнение (30) после некоторых преобразований, получим уравнение дуги параболы 3-го порядка, проходящего через четыре наперед заданные точки M_1, M_2, M_3, M_4 :

$$M = M_1 \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + M_2 \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \\ + M_3 \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + M_4 \left[\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3 \right]. \quad (35)$$

Используя свойства БН-исчисления, можно получить это же уравнение в другом виде:

$$M = (M_1 - M_4) \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + (M_2 - M_4) \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \\ + (M_3 - M_4) \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + M_4. \quad (36)$$

Преобразуем уравнение (35) и представим его как точечное уравнение дуги кривой AB , проходящей через точки A, C, D, B :

$$M = A\bar{t}(\bar{t}^2 - 2,5\bar{t}t + t^2) + 4,5C\bar{t}t(2 - 3t) + \\ + 4,5D\bar{t}t(3t - 1) + Bt(\bar{t}^2 - 2,5\bar{t}t + t^2), \quad (37)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

В этом уравнении при $t = 0 \rightarrow M \equiv A$, при $t = \frac{1}{3} \rightarrow M \equiv C$, при $t = \frac{2}{3} \rightarrow M \equiv D$, при $t = 1 \rightarrow M \equiv B$.

Уравнение (37) можно представить в более удобном виде:

$$M = (A\bar{t} + Bt) \frac{2 - 9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [C(2 - 3t) + D(3t - 1)]}{2}. \quad (38)$$

Переходя от точечных уравнений, которые по своей сути являются символьной записью, к параметрическим в трёхмерном пространстве получим систему однотипных уравнений:

$$\begin{cases} x_M = (x_A \bar{t} + x_B t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [x_C(2-3t) + x_D(3t-1)]}{2}, \\ y_M = (y_A \bar{t} + y_B t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [y_C(2-3t) + y_D(3t-1)]}{2}, \\ z_M = (z_A \bar{t} + z_B t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [z_C(2-3t) + z_D(3t-1)]}{2}. \end{cases} \quad (39)$$

Аналогичным образом все точечные уравнения можно преобразовать в параметрические, выполнив по координатный расчёт.

2.2.3 Моделирование отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперед заданных точек

Определим в плане сеть шестнадцати точек A_{ij} (Рисунок 12). Пусть задано: 16 точек A_{ij} , расположенных в пространстве, образующих криволинейную сеть некоторой криволинейной поверхности. Определим текущую точку M_{ij} этой криволинейной поверхности [110].

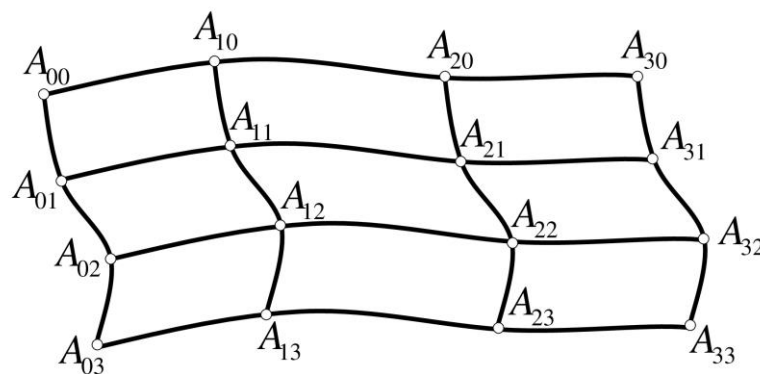


Рисунок 12 – План опорной сети 16-ти точек

Четверки точек $A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{30}$; $A_{01}, A_{11}, A_{21}, A_{31}$; $A_{02}, A_{12}, A_{22}, A_{32}$; $A_{03}, A_{13}, A_{23}, A_{33}$ организуем в четверку дуг $M_{i0}, M_{i1}, M_{i2}, M_{i3}$. На рисунке 13 M_{i0}

– текущая точка дуги $A_{00}A_{30}$; M_{i1} – текущая точка дуги $A_{01}A_{31}$; M_{i2} – текущая точка дуги $A_{02}A_{32}$; M_{i3} – текущая точка дуги $A_{03}A_{33}$.

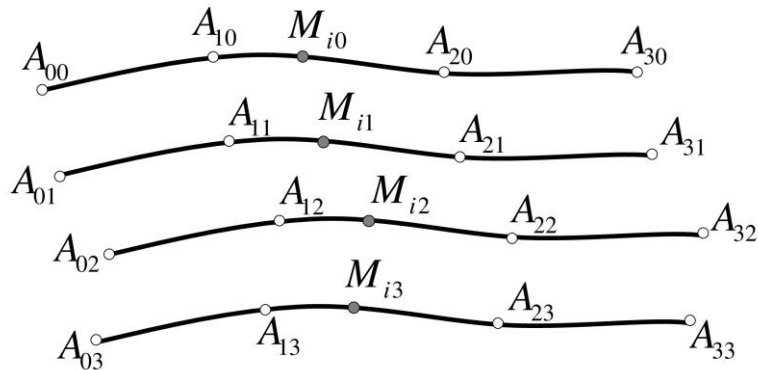


Рисунок 13 – Опорные линии топографической поверхности

Определим точечные уравнения сети 4-х дуг M_{i0} , M_{i1} , M_{i2} , M_{i3} (Рисунок 13), используя уравнение (39). Уравнение первой дуги:

$$M_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t) \frac{2 - 9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{10}(2 - 3t) + A_{20}(3t - 1)]}{2}, \quad (40)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Уравнение второй дуги:

$$M_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t) \frac{2 - 9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{11}(2 - 3t) + A_{21}(3t - 1)]}{2}, \quad (41)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Уравнение третьей дуги:

$$M_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t) \frac{2 - 9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{12}(2 - 3t) + A_{22}(3t - 1)]}{2}. \quad (42)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Уравнение четвертой дуги:

$$M_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t) \frac{2 - 9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{13}(2 - 3t) + A_{23}(3t - 1)]}{2}, \quad (43)$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Во всех 4-х дугах согласовано движение текущих точек с помощью параметра $0 \leq t \leq 1$.

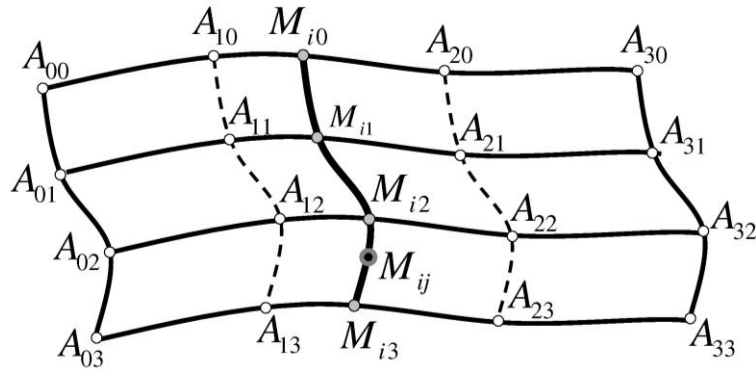


Рисунок 14 – Геометрическая схема конструирования топографической поверхности

БН-исчисление позволяет представлять такие согласованные дуги текущими точками и для них применить аналогичный алгоритм с использованием параметра $0 \leq \tau \leq 1$, тем самым формируя образующую отсека топографической поверхности. В результате получим согласованное двухпараметрическое множество точек M_{ij} (Рисунок 14).

Используя уравнения (40)-(43), получим итоговое точечное уравнение отсека топографической поверхности:

$$M_{ij} = (M_{i0}\bar{\tau} + M_{i3}\tau) \frac{2 - 9\bar{\tau}\tau}{2} + \frac{9\bar{\tau}\tau [M_{i1}(2 - 3\tau) + M_{i2}(3\tau - 1)]}{2}. \quad (44)$$

где $0 \leq \tau \leq 1$.

Используя по очереди уравнения (40)-(44), получим вычислительный алгоритм моделирования регулярного отсека поверхности, проходящий через 16-ть наперёд заданных точек, который является основой для моделирования участка нерегулярной топографической поверхности.

Преобразуем последовательность точечных уравнений (40)-(44) и представим в виде единого точечного уравнения:

$$\begin{aligned}
M_{ij} = & \left(\left[\left(A_{00}\bar{t} + A_{30}t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{10}(2-3t) + A_{20}(3t-1)]}{2} \right] \bar{\tau} + \right. \\
& \left. + \left[\left(A_{03}\bar{t} + A_{33}t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{13}(2-3t) + A_{23}(3t-1)]}{2} \right] \tau \right) \frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2} + \\
& + \left(\left[\left(A_{01}\bar{t} + A_{31}t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{11}(2-3t) + A_{21}(3t-1)]}{2} \right] (2-3\tau) + \right. \\
& \left. + \left[\left(A_{02}\bar{t} + A_{32}t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t [A_{12}(2-3t) + A_{22}(3t-1)]}{2} \right] (3\tau-1) \right) \frac{9\bar{\tau}\tau}{2}.
\end{aligned} \tag{45}$$

2.3 Моделирование участка нерегулярной топографической поверхности

Структура поверхности Земли носит незакономерный и изменчивый характер. Её аппроксимация никогда не бывает абсолютно точной. Если использовать триангуляцию, то криволинейные фрагменты земной поверхности спрямляются. С другой стороны использование гладких сплайнов тоже не является «панацеей», поскольку поверхность Земли далеко не всегда такая гладкая, как сплайновые поверхности. Исходя из этих соображений, аппроксимация участка топографической поверхности нерегулярной составной поверхностью может быть вполне оправданной, поскольку она несет в себе возможности моделирования, как гладких элементов земной поверхности, так и имеющих особые точки. Использование регулярных 16-точечных отсеков для моделирования нерегулярного участка топографической поверхности может обеспечить достаточно высокий уровень аппроксимации, обладая при этом достаточной гибкостью для обеспечения точек перегиба, а также упрощая решение метрических задач на топографической поверхности (например, определение площадей [111] и объёмов [112]). Следует отметить, что чем больше будет исходной информации (исходных точек), тем точнее получится модель топографической поверхности, однако с увеличением плотности точек растёт и необходимый объём вычислений.

Суть моделирования нерегулярной топографической поверхности заключается в том, что моделируемый участок топографической поверхности

разбивается на 16-ти точечные отсеки, формируя тем самым сеть регулярных 16-точечных отсеков (Рисунок 15). При этом аппроксимирующие топографическую поверхность 16-точечные отсеки стыкуются по нулевому порядку гладкости, что является необходимым допущением для создания нерегулярной топографической поверхности. Формирование сети отсеков, аппроксимирующих топографическую поверхность, удобно выполнять в плане (горизонтальная проекция). При этом план может иметь абсолютно любую форму расположения исходных точек относительно друг друга.

Предложенный подход к моделированию участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, позволяет использовать сразу 9 отсеков вместо 1-го по сравнению со сплайнами. Другим его преимуществом является то, что в его основу положены кривые 3-го порядка, которые в общем случае являются кривыми двойкой кривизны, это позволяет использовать предложенный способ для реконструкции участка топографической поверхности как на регулярной, так и на нерегулярной сети точек без необходимости предварительного преобразования сети из нерегулярной в регулярную.

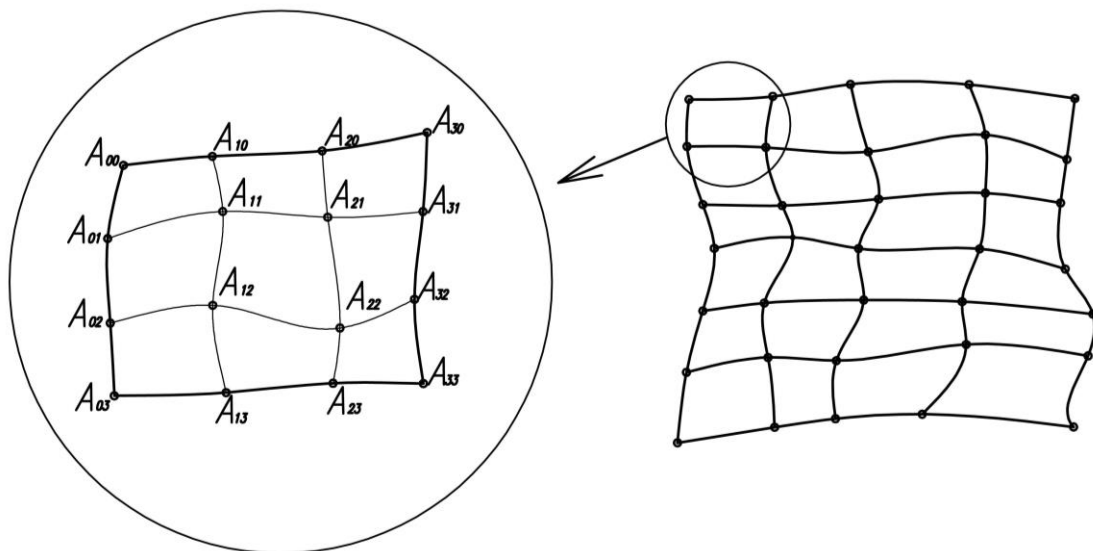


Рисунок 15 – Моделирование участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков

Предложенный вычислительный алгоритм является универсальным по отношению к исходной сети точек и прошёл успешную апробацию при моделировании участка топографической поверхности, как на регулярной, так и на нерегулярной сети точек.

2.3.1 Моделирование участка топографической поверхности на регулярной сети точек

В качестве первого примера рассмотрим моделирование абстрактного участка топографической поверхности на регулярной сети точек. В данном случае план участка охватывает 925 исходных точек и состоит из 96-ти 16-точечных отсеков прямоугольной формы (Рисунок 16). Желтым цветом на план-схеме показаны участки впадин, а синим цветом – участки возвышенности.

В качестве исходных данных для моделирования участка топографической поверхности была использована сводная таблица, созданная в офисном пакете MS Excel. Впоследствии данные из сводной таблицы были импортированы в программный пакет Maple, с помощью которого было выполнено непосредственное моделирование и визуализация участка топографической поверхности (Рисунок 17). Листинг программы приводится в приложении Б.

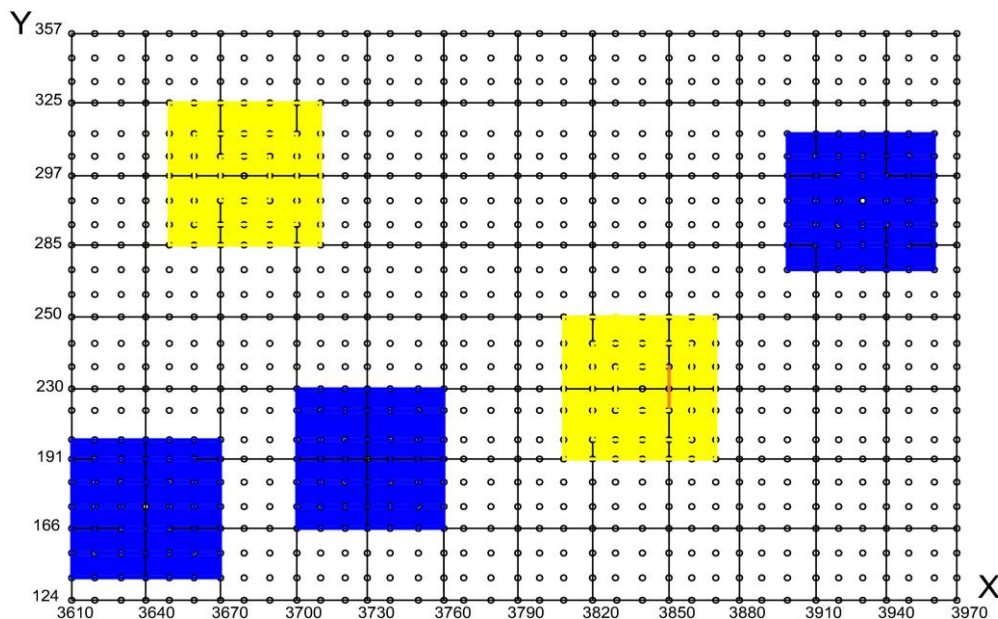


Рисунок 16 – План-схема участка топографической поверхности, разбитой на 96-ть 16-точечных отсеков

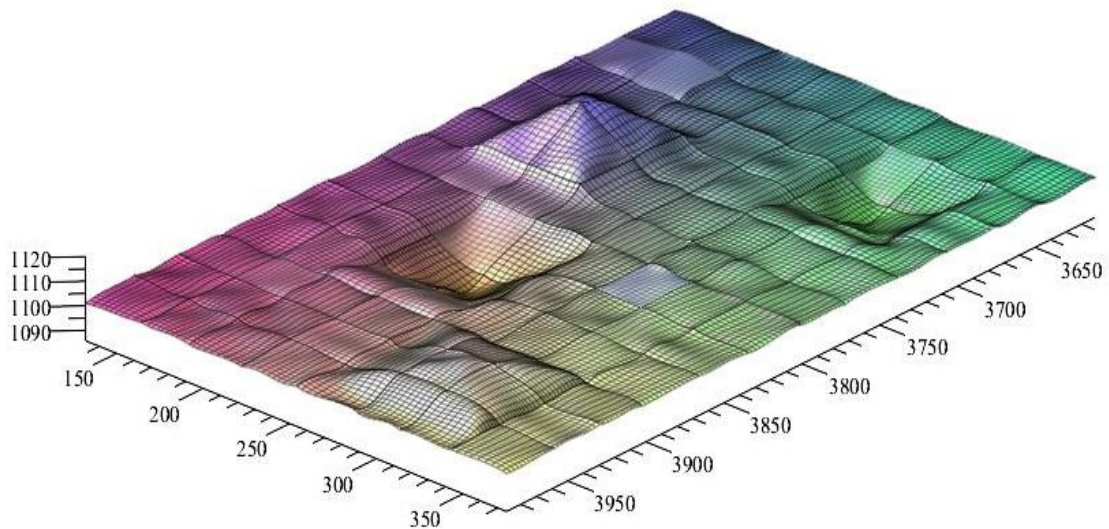


Рисунок 17 – Визуализация результатов моделирования участка топографической поверхности на регулярной сети точек

2.3.2 Моделирование участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек

На втором примере показано использование этого же способа для моделирования участка топографической поверхности, расположенной в верховьях балки Каменская (г. Лисичанск), построенного на нерегулярной сети точек. В этом примере исходными данными для моделирования послужили результаты инженерно-геодезических изысканий рабочего проекта «Водоперехватывающая система в верховьях балки Каменская», выполненных в AutoCAD. Далее из AutoCAD были экспортированы данные в виде координат точек в текстовый файл, который и послужил исходной информацией для моделирования и визуализации исследуемого участка топографической поверхности в программном пакете Maple (листинг программы представлен в приложении В).

На рисунке 18 представлена исходная план-схема участка топографической поверхности. В данном случае план-схема включает в себя 18-ть 16-точечных отсеков. Как видно из рисунка 18, все 16-точечные отсеки носят незакономерный характер. Причём в некоторых случаях имеют место практически вырожденные

четырёхугольники (например, отсеки 6 и 12).

Заметим, что в случае, когда отсек состоит из количества точек менее 16, то не обязательно прибегать к методам интерполяции или экстраполяции для получения необходимого количества точек. Абсолютно без потери точности некоторые точки можно сделать кратными. При этом точечное уравнение отсека поверхности не изменится, но в процессе вычислений за счёт кратности точек существенно сократится.

Для сравнения этот же участок топографической поверхности был смоделирован с помощью триангуляции в программном пакете Civil 3D. Визуализация результатов моделирования представлена на рисунке 19.

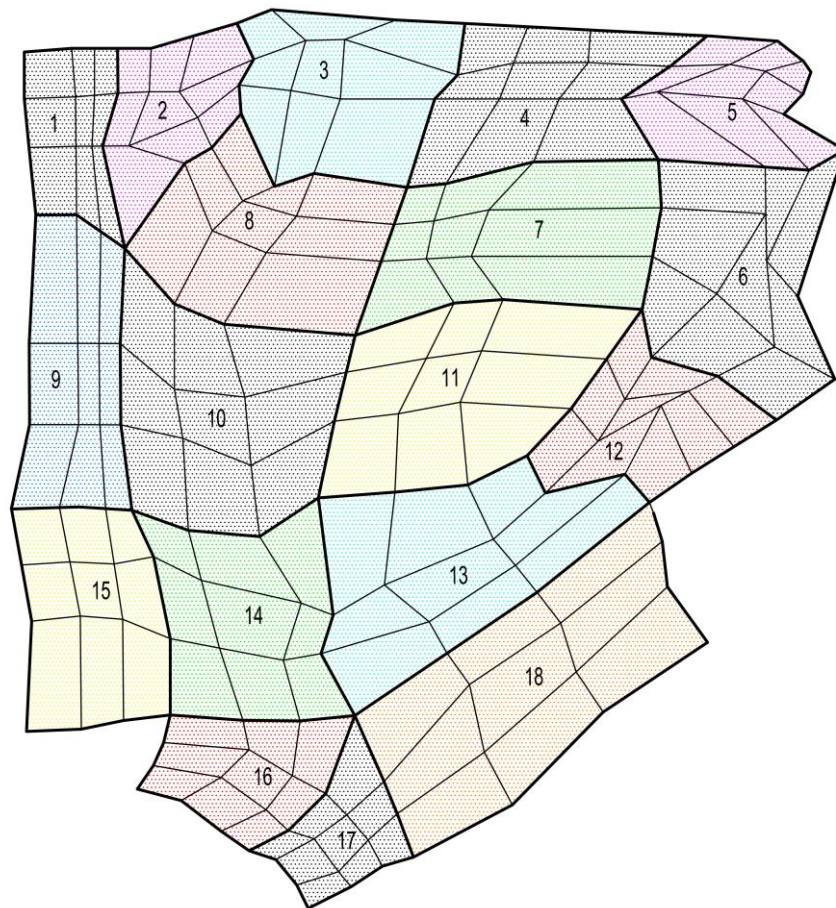


Рисунок 18 – План-схема участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек

Как видно из рисунка 19 в случае моделирования нерегулярной топографической поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков, удалось более

качественно передать криволинейную форму топографической поверхности. Особенно это заметно в тех зонах, где имеют место большие разрывы между исходными точками. Сравнить же быстродействие этих двух принципиально разных алгоритмов будет не совсем корректным, поскольку геометрическое моделирование на основе 16-точечных отсеков представляет собой алгоритм криволинейной интерполяции, а триангуляция – это просто способ выбора точек для формирования треугольных сегментов, интерполяция которых является отдельной задачей.

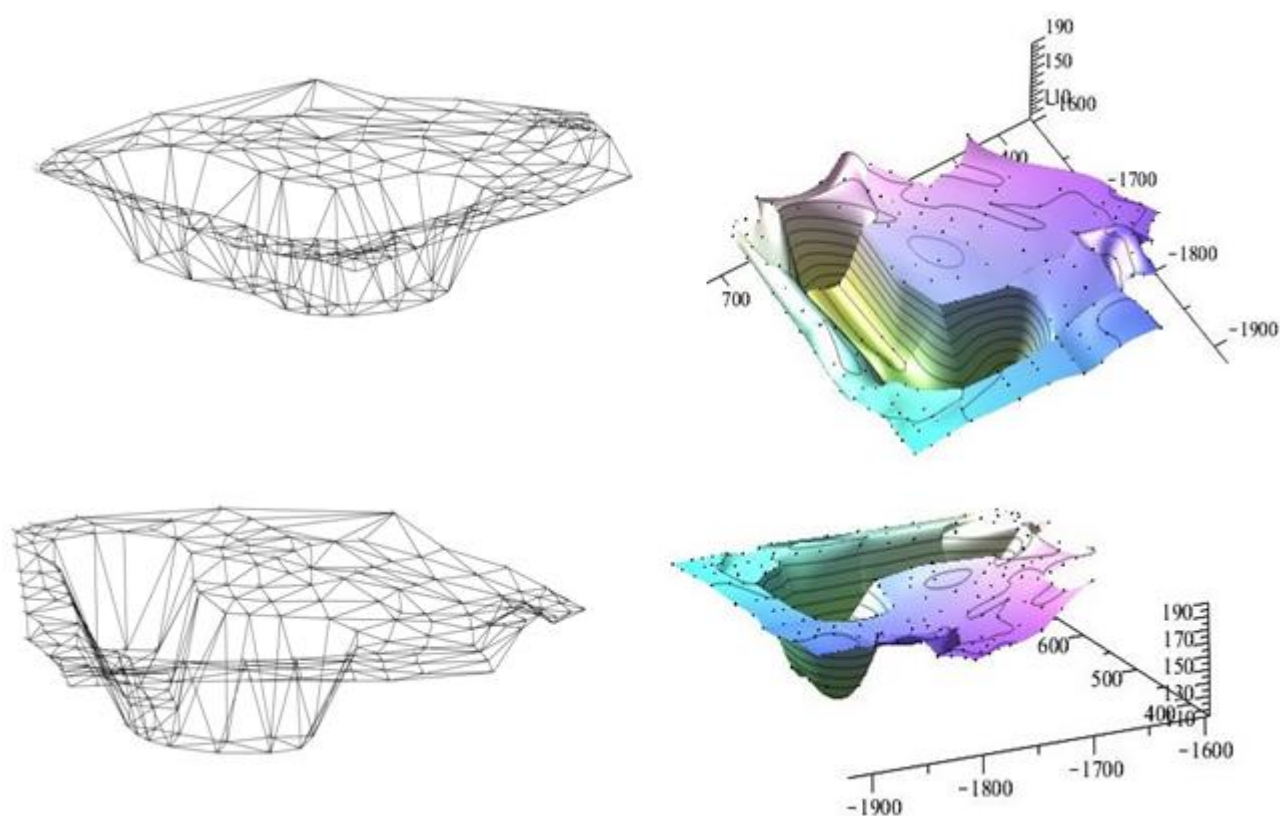


Рисунок 19 – Сравнение результатов моделирования участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек

2.3.3 Моделирование поверхности рельефа местности на основе спутниковых снимков SRTM

Аналитическое и компьютерное моделирование участка топографической поверхности является важной составляющей при решении широкого спектра практически задач в области геодезии, картографии, землеустройстве, навигации,

строительства, горного дела и т.д. При этом результат моделирования в значительной степени зависит от исходных данных, которые могут быть представлены самыми разнообразными способами. Наиболее сложным является случай, когда доступ к моделируемому участку затруднён или вообще невозможен. В таких случаях широкое применение получили системы дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) на основе спутниковых снимков, основанных на разнообразных технологиях. В общем случае дистанционное зондирование представляет собой процесс, посредством которого собирается информация об объекте, территории или явлении без непосредственного контакта с ним. Результатом работы ДЗЗ являются спутниковые снимки, которые для практического использования ещё необходимо подвергнуть процессу расшифровки. Для расшифровки можно использовать специализированные программные пакеты для обработки данных ДЗЗ (например, ERDAS IMAGINE) или инструменты современных геоинформационных систем (например, семейство программных продуктов ArcGIS американской компании ESRI). Однако даже эти мощные программные продукты не всегда в полной мере могут обеспечить необходимые инструменты для решения практических задач. Основным их недостатком является то, что в основу аппроксимации участка топографической поверхности заложены высокоскоростные алгоритмы триангуляции, о недостатках которых применительно к моделированию участка топографической поверхности было подробно описано в первом разделе диссертации, а также в работе [113]. Анализ научных исследований в данном направлении [114, 115] показал, что для моделирования поверхности рельефа местности и создания цифровых моделей рельефа местности используются методы TIN и DEM, а в некоторых случаях (например, в работе [116]) предлагается использовать их усреднённую комбинацию для получения более корректных результатов моделирования. Однако усредняя результат моделирования, полученный разными способами, можно не только повысить точность итоговой модели рельефа местности, но и снизить таковую, поскольку усредняются также и ошибки,

свойственные каждому отдельному способу моделирования, что приводит к появлению новых ошибок и неточностей.

Вообще верификация подобного рода моделей всегда сталкивается с определенными трудностями из-за отсутствия эталонной поверхности, поскольку любой из способов моделирования поверхности рельефа местности имеет свои преимущества и недостатки и его нельзя выделить в качестве эталона. А сравнивать между собой результаты, содержащие ошибки разного рода, также не совсем корректно. К тому же сама съёмка не безупречна и может иметь свои погрешности, к которым относятся: наличие артефактов на спутниковых снимках, ошибки геопривязки и внутренней геометрии спутникового изображения. Это подтверждается последними исследованиями [117].

Исходя из всего вышесказанного, способ аппроксимации нерегулярного участка топографической поверхности с помощью регулярных 16-точечных отсеков может быть использован для расшифровки спутниковых снимков не менее, а в некоторых случаях и более эффективно, поскольку использование интерполяционных методов позволяет значительно уменьшить или полностью исключить ошибки, связанные с наличием артефактов на спутниковых снимках.

В качестве исходных данных воспользуемся, находящимися в свободном доступе, спутниковыми снимками поверхности Земли SRTM3 [118]. SRTM (Shuttle radar topographic mission) – международная миссия по получению данных цифровой модели рельефа (ЦМР) территории Земли. Съёмка местности проводилась в феврале 2000 г. с борта космического корабля многоразового пользования «Шаттл» с помощью радарной интерферометрической камеры и двух радиолокационных сенсоров SIR-C и X-SAR установленных на борту корабля [113, с. 17-22]. Результатом съёмки стала цифровая модель рельефа 85% поверхности Земли. Всего в результате съёмки было получено 12 терабайт радиолокационных данных. Данные распространяются в нескольких вариантах – сетка с размером ячейки 1 угловая секунда и 3 угловые секунды. Более точные односекундные данные (SRTM1) доступны на территорию США, на остальную поверхность Земли доступны только трехсекундные данные (SRTM3). Данные

съёмки представляют собой набор файлов, каждый из которых покрывает территорию размером 1×1 градус, с разрешением в 3 секунды на 1 пикселе (примерно 90 м в широтном направлении), такой квадрат является матрицей размером 1201×1201 элементов (пикселей), которая может быть импортирована в различные программы построения карт и геоинформационные системы (например, ArcGIS [137, 119]). Каждому пикселю присвоена высотная отметка в метрах. Референц-эллипсоид данных – WGS84.

Исходный файл съёмки N48E038 (координаты левого нижнего угла: широта – 48° , долгота – 38°) находится в формате HGT. Чтобы его прочесть воспользуемся программным пакетом ArcGIS и конвертируем в растровый формат JPG (Рисунок 20). Для применения алгоритма аппроксимации необходимо знать координаты узловых точек. Координаты в плане (долгота и широта) известны. Тогда задача сводится к определению высотных отметок узловых точек.

Как видно из рисунка 20, формат hgt использует градацию серого для передачи высотных отметок. Эта шкала использует на каждый пиксел изображения 1 байт информации и передаёт 256 оттенков (градаций) серого цвета, или яркости. Причём значению 0 соответствует чёрный цвет, а значению 255 – белый.

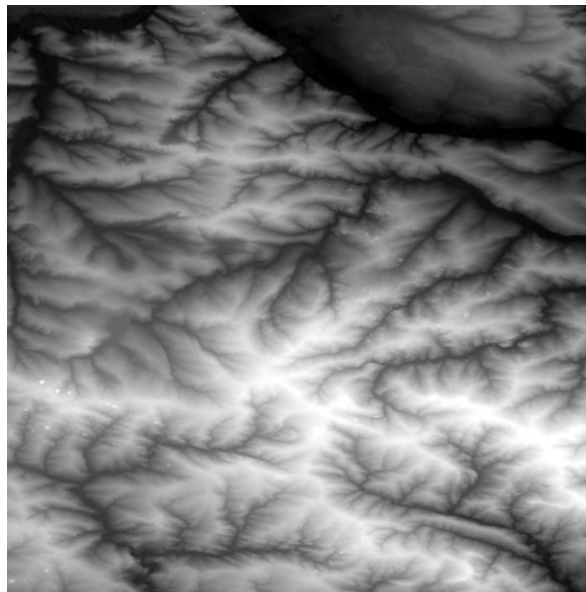


Рисунок 20 – Спутниковый снимок участка топографической поверхности N48E038

В общем случае формат HGT уже содержит информацию о высотных отметках, которые необходимо расшифровать и, используя полученную информацию, можно сразу моделировать участок топографической поверхности. Однако такой подход чреват сложностью обработки гиперколичественного множества точек [41, с. 234] и невозможностью использования методов математического анализа для решения инженерных задач на полученной модели участка топографической поверхности.

Чтобы избежать расшифровки формата HGT для определения зависимости высотных отметок от шкалы оттенков серого цвета, в качестве примера воспользуемся программным пакетом ArcGIS, который для каждой конкретной точки может показать как значение высотных отметок, так и численное значение оттенка серого цвета. Таким образом, были получены исходные данные для моделирования зависимости высотных отметок от шкалы оттенков серого цвета, которые представлены в виде точек на рисунке 21. Полученные значения с высокой точностью (коэффициент детерминации $R^2 = 0,999996$) аппроксимируются прямой линией, уравнение которой:

$$y = 1,134x + 45,389, \quad (46)$$

где x – значения на шкале оттенков серого цвета;

y – значения высотных отметок, м.

Тогда при $x = 0$ (чёрный цвет) получим минимальное значение высотной отметки на данном участке – 45,839 м, а при $x = 255$ – максимальное – 334,559 м.

Следует отметить, что для того чтобы получить исходные данные для моделирования зависимости высотных отметок от шкалы оттенков серого цвета можно не использовать возможности ГИС. Достаточно расшифровать поочередно несколько значений высотных отметок формата HGT.

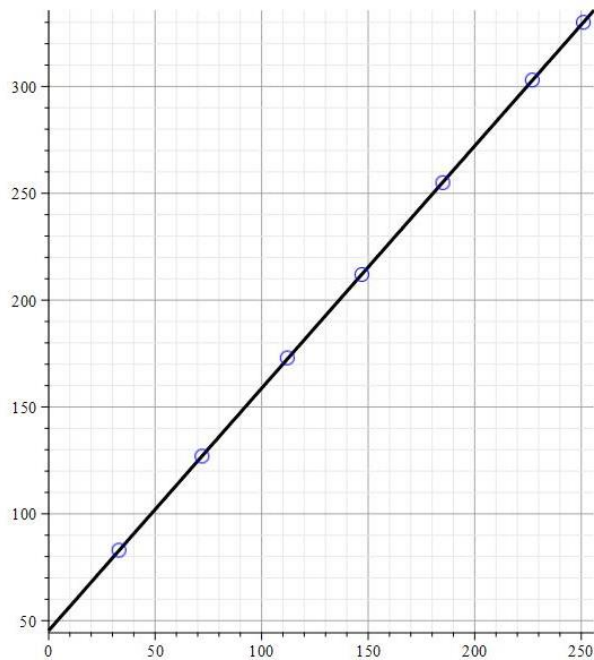


Рисунок 21 – Визуализация зависимости высотных отметок от шкалы оттенков серого цвета

Кроме того аналогичным образом можно построить многофакторную геометрическую модель, принадлежащую многомерному пространству, для расшифровки не только черно-белых, но и цветных снимков. Тогда количество параметров будет зависеть от необходимой цветовой схемы (например, RGB, CMYK и т.п.).

В общем случае задача определения высотных отметок напрямую связана с алгоритмом выбором алгоритмов аппроксимации и интерполяции. Например, в работе [120] для решения аналогичной задачи было предложено конвертировать сетку высот GRID в модель TIN с помощью алгоритма Very Important Point (очень важная точка). В нашем случае для моделирования используется регулярные 16-точечные отсеки [111, с. 45-50; 112, с. 13-19; 113, с. 17-22]. Это даёт возможность, имея матрицу высот без всякой предварительной обработки приступить к построению модели рельефа местности используя следующий вычислительный алгоритм.

1. Импортируем растровое изображение спутниковой съёмки рельефа местности.

2. Разбиваем план (горизонтальную проекцию) на необходимое количество 16-точечных отсеков. Т.е. выбираем число узловых точек из расчёта $3n+1$ по горизонтали и по вертикали, где n – количество 16-точечных отсеков. Причём расстояние между узловыми точками может быть как одинаковым, так и различным. С точки зрения аппроксимации алгоритм является универсальным как для равномерного, так и для неравномерного распределения узловых точек. Однако следует отметить, что в случае равномерного распределения полученный алгоритм может быть в значительной мере оптимизирован и иметь большее быстродействие. Количество 16-точечных отсеков выбирается из условий требуемой точности аппроксимации. Конечно, с ростом количества отсеков растёт и время вычислений, но при этом достигается большая точность аппроксимации.

3. С помощью уравнения (46) определяем высотные отметки узловых точек аппроксимации.

4. Используем предложенную последовательность точечных уравнений регулярного 16-точечного отсека для моделирования нерегулярного участка топографической поверхности.

$$\left[\begin{array}{l} M_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t[A_{10}(2-3t) + A_{20}(3t-1)]}{2}, \\ M_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t[A_{11}(2-3t) + A_{21}(3t-1)]}{2}, \\ M_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t[A_{12}(2-3t) + A_{22}(3t-1)]}{2}, \\ M_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t[A_{13}(2-3t) + A_{23}(3t-1)]}{2}, \\ M_{ij} = (M_{i0}\bar{\tau} + M_{i3}\tau) \frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2} + \frac{9\bar{\tau}\tau[M_{i1}(2-3\tau) + M_{i2}(3\tau-1)]}{2}, \end{array} \right. \quad (47)$$

где A_{ij} – исходные для моделирования 16-ть точек;

t и τ – текущие параметры точечных уравнений, которые изменяются от 0 до 1.

5. Вывод результатов моделирования.

Для адаптации предложенного выше алгоритма к уже имеющему программную реализацию способу геометрического моделирования участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, разобьём его на два этапа.

1 этап охватывает 1-3 разделы вычислительного алгоритма и представляет собой дополнительную программу для формирования исходного массива точек, выполненной в среде программирования Delphi. Интерфейс программы представлен на рисунке 22.

2 этап охватывает 4-5 разделы вычислительного алгоритма и использует графические возможности программного пакета Maple для построения и визуализации геометрической модели поверхности рельефа местности.

Воспользуемся инструментами программного пакета ArcGIS для сравнения результатов моделирования поверхности рельефа местности. На рисунке 23 хорошо видно, что модель полученная средствами ArcGIS имеет резкие неконтролируемые всплески высот, что приводит к необходимости дополнительной обработки результатов моделирования.

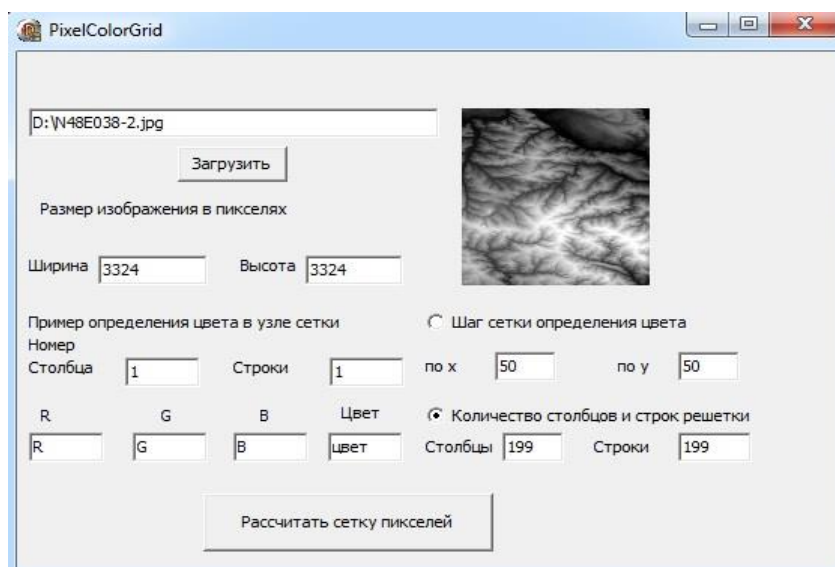


Рисунок 22 – Интерфейс программы для определения значений оттенков серого цвета в узлах аппроксимирующей сети точек

Появление этих всплесков связано, скорее всего, с некоторыми артефактами в виде белых точек на спутниковых снимках. Этих артефактов лишена модель, полученная на основе аппроксимации поверхности рельефа местности 16-точечными отсеками. На примере (Рисунок 24) использовалась сеть в 199 строк и 199 столбцов. В результате итоговая модель поверхности рельефа местности состоит из 4356 регулярных 16-точечных отсеков. Построение итоговой модели в программном пакете Maple на ноутбуке средней мощности заняло 58,407 с, что можно считать хорошим результатом, учитывая, что программный код не был оптимизирован. Причём большую часть времени выполнения программы (55,755 с) тратит команда `plot3d` на визуализацию результатов моделирования.

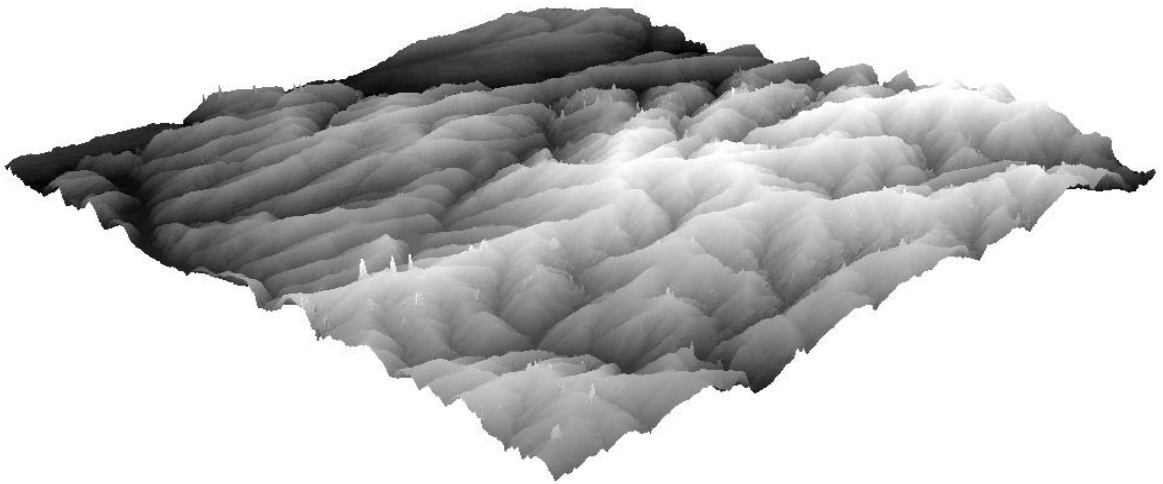


Рисунок 23 – Моделирование поверхности рельефа местности средствами ArcGIS

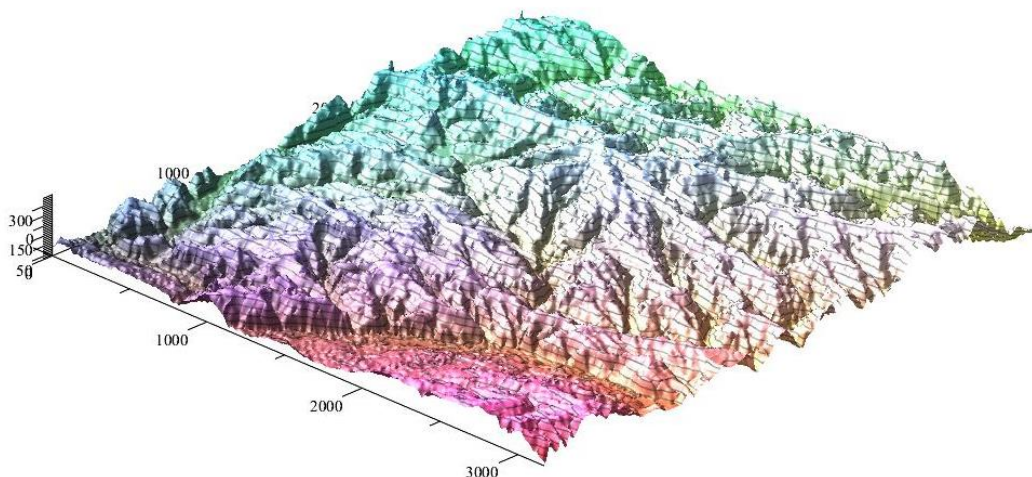


Рисунок 24 – Моделирование поверхности рельефа местности, состоящей из 4356 регулярных 16-точечных отсеков

Конечно, при увеличении количества 16-точечных отсеков будет расти точность итоговой модели рельефа местности, но при этом будет расти и время, затраченное на расчёт и визуализацию результатов моделирования. Исследуем, как будет изменяться время, необходимое на расчёт и визуализацию геометрической модели поверхности рельефа местности, в зависимости от количества 16-точечных отсеков (Таблица 1).

Следует отметить, что воспроизводимость результатов полученных в таблице 1 данных находится в некоторой окрестности, хотя расчёты и были выполнены на одном и том же ноутбуке при всех одинаковых условиях. Исходя из этих соображений, воспользуемся для определения искомой зависимости методами регрессионного анализа.

Регрессионный анализ показал зависимость между ростом времени расчёта и визуализации модели поверхности очень близкую к линейной. Время, необходимое на расчёт модели поверхности можно описать следующим уравнением с коэффициентом детерминации $R^2 = 0,9704$: $y = 0,0004x + 0,997$ (Рисунок 25). А время, необходимое на визуализацию модели поверхности –

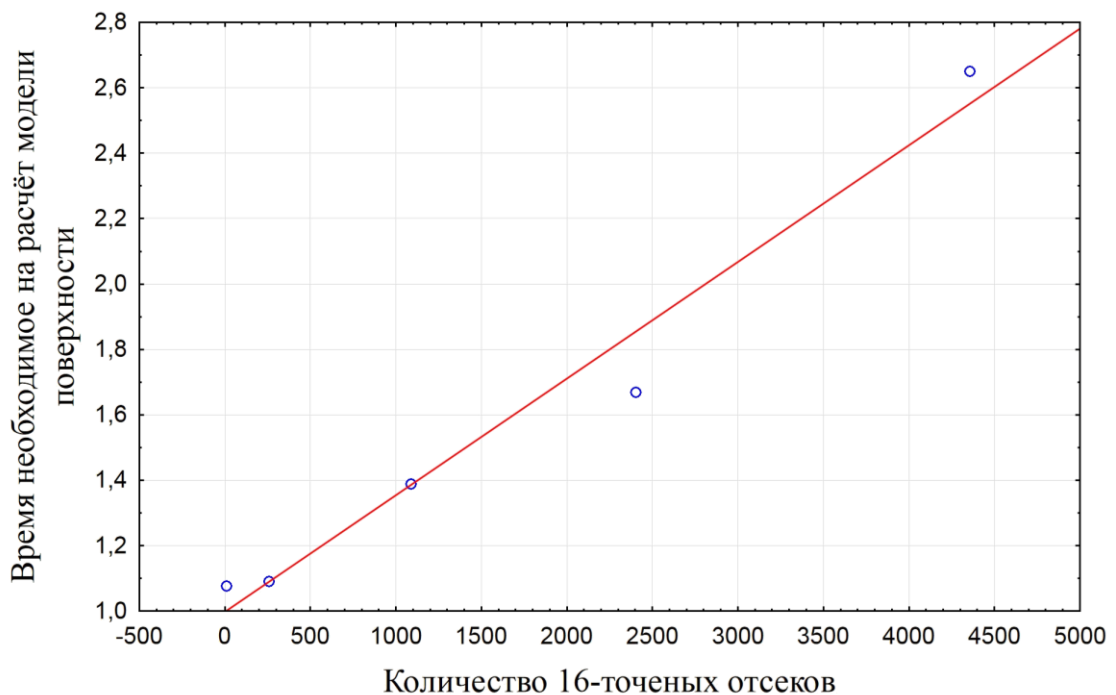
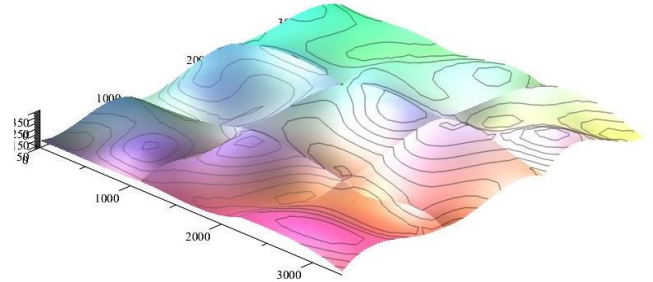
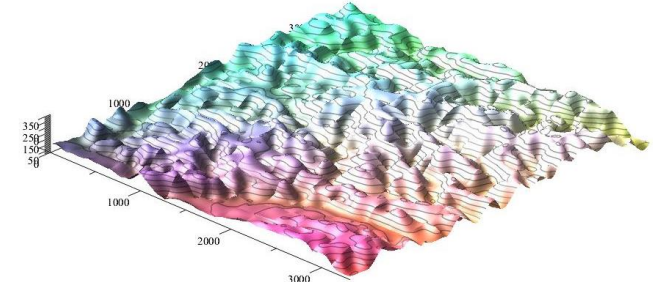
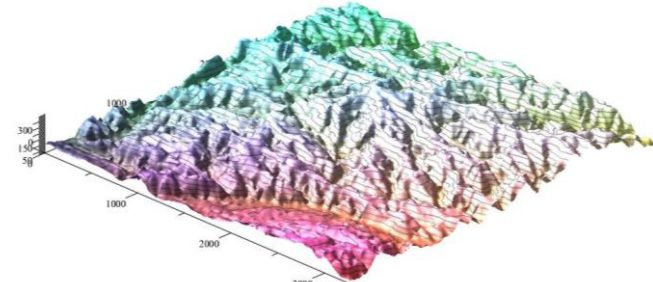
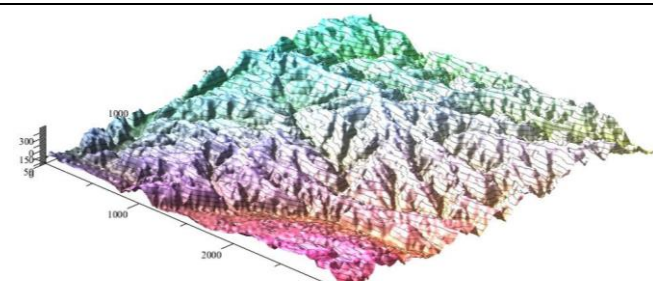
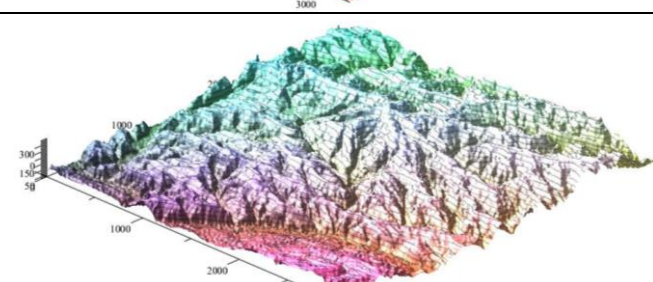


Рисунок 25 – Зависимость времени на расчёт модели поверхности от количества 16-точечных отсеков: $y = 0,0004x + 0,997$; $R^2 = 0,9704$

$y = 0,0126x - 0,9846$ при $R^2 = 0,9938$ (Рисунок 26).

Таблица 1 - Эволюция модели поверхности рельефа местности состоящей, из регулярных 16-точечных отсеков

Количество 16-точечных отсеков	Время необходимое на:		Модель поверхности рельефа местности
	Расчёт модели поверхности, с	визуализацию модели поверхности, с	
9	1,077	0,312	
256	1,092	2,886	
1089	1,389	12,074	
2401	1,67	26,598	
4356	2,652	55,755	

Как видно из анализа полученных зависимостей, время необходимое на расчёт поверхности рельефа местности изменяется незначительно по сравнению с временем, необходимым на визуализацию результатов моделирования. Это значит, что для инженерных задач, не требующих визуализации 3-мерной поверхности рельефа местности, можно увеличивать количество 16-точечных отсеков, а с ними и точность результата моделирования, практически без ограничений, потому что увеличение количества 16-точечных отсеков в 484 раза всего на 1,575 секунды увеличило время вычислений.

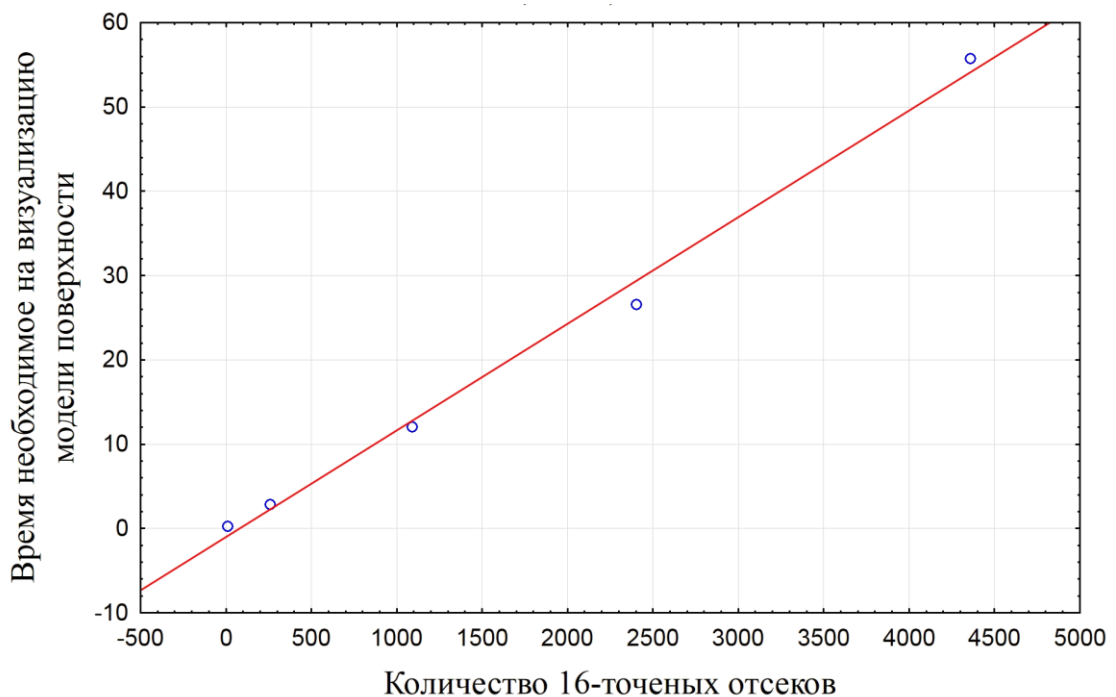


Рисунок 26 – Зависимость времени на визуализацию модели поверхности от количества 16-точечных отсеков: $y = 0,0126x - 0,9846$; $R^2 = 0,9938$

2.3.4 Геометрическое моделирование микроструктуры поверхности материала

Геометрическое моделирование микроструктуры поверхности является актуальной и важной практической задачей при компьютерном моделировании и расчёте не только газодинамических систем, но и тепломассообменных процессов. Особенно это важно для турбулентных режимов движения жидкости и газа, что и было наглядно показано в работе [121], в которой поставленная задача

была решена с помощью методов фрактальной геометрии. Однако эту же задачу можно решить и другими методами геометрического моделирования. Например, можно использовать способ моделирования участка топографической поверхности на регулярной сети точек для моделирования и аналитического описания микроструктуры поверхности материала. Точечные уравнения, основанные на инвариантах аффинной геометрии, справедливы также и на микроуровне. При этом нет необходимости в модернизации алгоритма моделирования нерегулярной поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков. Достаточно должным образом подготовить исходные данные для моделирования. Конечно, провести геодезические испытания на микроуровне по понятным причинам не получится, однако для построения модели можно пользоваться методами имитационного моделирования.

Для примера нами был использован генератор случайных чисел из пакета MS Excel для моделирования структуры микрорельефа поверхности некоторого абстрактного материала (Рисунок 27).

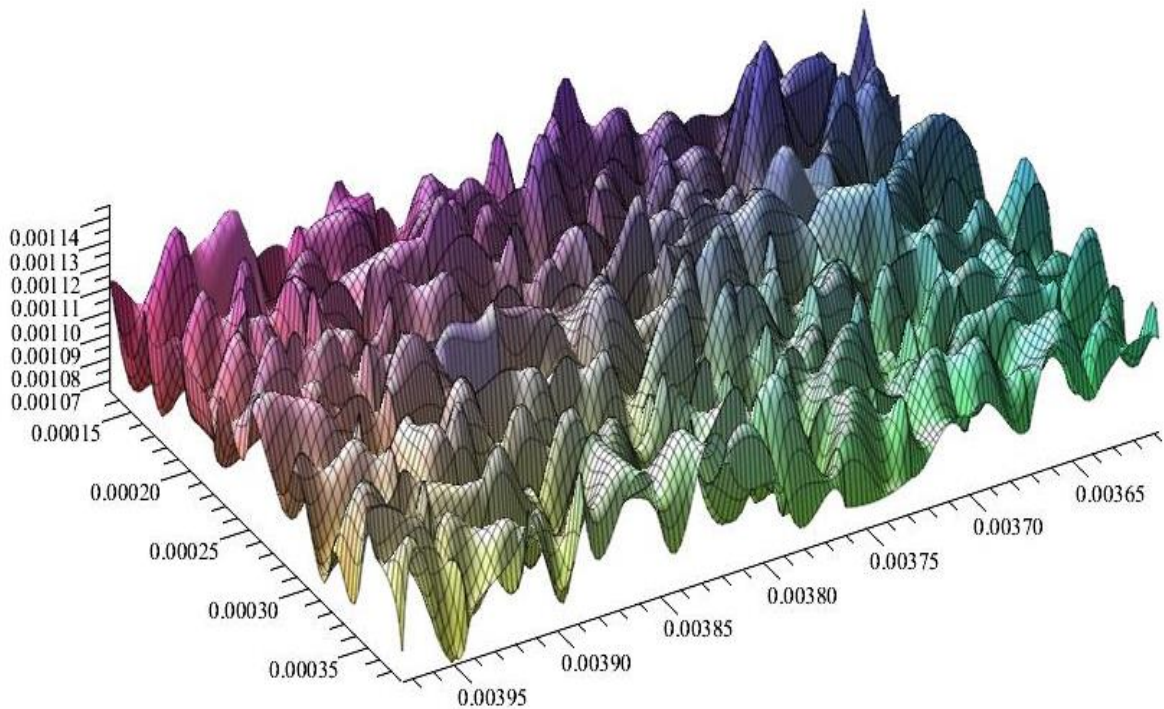


Рисунок 27 – Визуализация геометрической модели микроструктуры поверхности материала

ВЫВОДЫ ПО ВТОРОМУ РАЗДЕЛУ

1. Исследованы способы моделирования дуг алгебраических кривых и отсеков поверхности 2-го и 3-го порядков, проходящих через наперед заданные точки, которые являются основой для создания вычислительных алгоритмов моделирования нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 9-точечных, 12-точечных и 16-точечных отсеков.

2. Обоснована возможность использования регулярных отсеков поверхности для аппроксимации участка нерегулярной топографической поверхности. Приведены преимущества предложенного способа по сравнению с существующими методами создания ЦМР.

3. Предложен способ реконструкции отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперед заданных точек, с помощью модифицированного уравнения дуги кривой Безье 3-го порядка. Предложенный способ определения топографической поверхности позволяет не только минимизировать количество необходимых вычислений и более точно аппроксимировать криволинейную форму топографической поверхности, но и усовершенствовать существующий инструментарий современных геоинформационных систем в части моделирования цифрового рельефа местности.

4. Приведены примеры моделирования нерегулярной топографической поверхности на регулярной и нерегулярной сети точек. В программном пакете Maple создано соответствующее программное обеспечение, приведенное в приложениях Б и В.

5. Предложен альтернативный способ геометрического моделирования микроструктуры поверхности материала как нерегулярной поверхности состоящей из 16-точечных отсеков с использованием генератора случайных чисел из пакета MS Excel.

6. Предложен способ расшифровки спутниковых снимков рельефа местности SRTM3, в основу которого положена аппроксимация поверхности рельефа местности регулярными 16-точечными отсеками поверхности. Такой

подход кроме прочих преимуществ позволяет нивелировать влияние мелких артефактов в виде различного рода пятен при построении модели поверхности рельефа местности. Другим преимуществом предложенного метода является наличие итоговых уравнений регулярных 16-точечных отсеков, что позволяет использовать широкий инструментарий методов математического анализа для решения различного рода инженерных задач на итоговой поверхности рельефа местности. Выбор в качестве исходных данных снимков SRTM обусловлен исключительно их доступностью широкой общественности. Предложенный способ моделирования можно рассматривать как инструмент для реконструкции участка топографической поверхности на основе дискретного массива точек и потому аналогичным способом можно расшифровывать и другие спутниковые снимки, вне зависимости от способа получения исходных данных. Кроме того предложенный вычислительный алгоритм может быть модифицирован для использования при реконструкции любых плоских изображений в 3-мерные модели, что является перспективой дальнейших исследований.

РАЗДЕЛ 3

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА
ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В инженерной практике часто возникает необходимость решения тех или иных задач на топографической поверхности. К таким задачам можно отнести: аналитическое определение участка топографической поверхности, определение горизонталей участка топографической поверхности с последующим построением линий вероятного водотока, определение площади участка топографической поверхности и вертикальная планировка участка топографической поверхности. Все эти задачи имеют ярко выраженную практическую направленность. Как было сказано выше, первая из них относится к основным задачам современных геоинформационных систем в разделе цифрового моделирования рельефа местности. Вычислительные алгоритмы её решения были изложены во 2-ой главе. Однако здесь возникает отдельный класс задач. Дело в том, что каждый отдельный способ определения ЦМР предусматривает свой подход к решению поставленных задач. Предложенный во 2-ой главе способ моделирования участка нерегулярной топографической поверхности также не является исключением. Поэтому в 3-й и 4-й главах приводится свой взгляд для решения инженерных задач на топографической поверхности применительно к предложенному ранее способу моделирования и аналитического описания ЦМР.

3.1 Вычислительный алгоритм построения горизонталей отсека топографической поверхности

Одной из основных геометрических характеристик поверхности земельного участка, являются горизонтали. Их наличие или возможность построения на геометрической модели рельефа местности позволяет определить, в той или иной степени, всю необходимую информацию о геометрической форме земельного участка, используя свойства горизонталей, к которым относятся:

1. все точки одной горизонтали имеют одинаковую абсолютную высотную отметку, которая отличается от высоты точек соседних горизонталией на высоту сечения рельефа;

2. все горизонталы, которые замыкаются в пределах листа карты, обозначают возвышенность или впадину, которые выделяют подписями отметок и бергштрихами;

3. чем больше горизонталей на склоне, тем он выше. Таким способом по количеству горизонталей можно определить превышение одних точек местности над другими;

4. чем ближе горизонталы размещены друг к другу, тем круче склон и тем больше угол наклона местности. Так по величине заложения (по расстоянию между горизонталями) можно определить крутизну склона в градусной мере;

5. кратчайшее расстояние между двумя горизонталями – перпендикуляр к ним, показывает направление наибольшей крутизны. Т.е. направление склона в каждой его точке перпендикулярно по отношению к горизонталям;

6. водораздельные линии и оси лощин пересекаются горизонталями под прямым углом;

7. горизонталы на карте не пересекаются (за исключением изображения нависшего утёса) и сохраняют сходство соответствующих им линий на местности, образованных в результате воображаемого сечения рельефа плоскостями.

К существующим способам определения горизонталей на основе ЦМР можно отнести следующие:

1. Алгоритм Marching Squares;
2. Способ сканирования;
3. Метод трассировки.

К недостаткам этих способов можно отнести тот факт, что все полученные в результате уравнения горизонталей являются дискретными, что приводит к необходимости использования методов дискретной геометрии для моделирования линий вероятного водотока. С другой стороны имея в наличии непрерывный вычислительный алгоритм моделирования участка нерегулярной

топографической поверхности, состоящей из 16-ти точечных отсеков, можно получить точечные и параметрические уравнения горизонталей топографической поверхности, которые впоследствии можно использовать для построения линий вероятного водотока.

Предложим следующий вычислительный алгоритм построения и аналитического определения горизонталей отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперед заданных точек [121], как линий пересечения горизонтальной плоскости с высотной отметкой h_i и 16-точечного отсека топографической поверхности.

1. Выбираем шаг построения горизонталей отсека топографической поверхности $\Delta h = h_{i+1} - h_i$.

2. Выражаем значение параметра τ через параметр t . Для этого необходимо для каждой горизонтали решить следующее уравнение относительно параметра τ :

$$\begin{aligned}
 h_i = & \left(z_{A_{00}} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + z_{A_{10}} \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \right. \\
 & \left. + z_{A_{20}} \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + z_{A_{30}} \left[\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3 \right] \right) \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2\tau + \bar{t}\tau^2 \right] + \\
 & + \left(z_{A_{01}} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + z_{A_{11}} \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \right. \\
 & \left. + z_{A_{21}} \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + z_{A_{31}} \left[\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3 \right] \right) \left[9\bar{t}^2\tau - 4,5\bar{t}\tau^2 \right] + \\
 & + \left(z_{A_{02}} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + z_{A_{12}} \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \right. \\
 & \left. + z_{A_{22}} \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + z_{A_{32}} \left[\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3 \right] \right) \left[-4,5\bar{t}^2\tau + 9\bar{t}\tau^2 \right] + \\
 & + \left(z_{A_{03}} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2 \right] + z_{A_{13}} \left[9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2 \right] + \right. \\
 & \left. + z_{A_{23}} \left[-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2 \right] + z_{A_{33}} \left[\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3 \right] \right) \left[\bar{t}^2\tau - 2,5\bar{t}\tau^2 + \tau^3 \right].
 \end{aligned}$$

Решение данного уравнения в работе не приводится из-за его объёма. Все вычислительные операции данного алгоритма выполнены в *VBA* с последующей визуализацией результатов в *AutoCAD*.

3. Подставляем значение параметра $\tau = f(t)$ в точечное уравнение отсека топографической поверхности, проходящей через 16-ть наперед заданных точек, формируя, таким образом, однопараметрическое множество точек:

$$\begin{aligned}
M_i = & N_1 \left[\bar{f}(t)^3 - 2,5\bar{f}(t)^2 f(t) + \bar{f}(t) f(t)^2 \right] + \\
& + N_2 \left[9\bar{f}(t)^2 f(t) - 4,5\bar{f}(t) f(t)^2 \right] + \\
& + N_3 \left[-4,5\bar{f}(t)^2 f(t) + 9\bar{f}(t) f(t)^2 \right] + \\
& + N_4 \left[\bar{f}(t)^2 f(t) - 2,5\bar{f}(t) f(t)^2 + f(t)^3 \right],
\end{aligned}$$

где $\bar{f}(t) = 1 - f(t)$;

$$\begin{aligned}
N_1 = & A_{00} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2 t + \bar{t} t^2 \right] + A_{10} \left[9\bar{t}^2 t - 4,5\bar{t} t^2 \right] + A_{20} \left[-4,5\bar{t}^2 t + 9\bar{t} t^2 \right] + \\
& + A_{30} \left[\bar{t}^2 t - 2,5\bar{t} t^2 + t^3 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 = & A_{01} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2 t + \bar{t} t^2 \right] + A_{11} \left[9\bar{t}^2 t - 4,5\bar{t} t^2 \right] + A_{21} \left[-4,5\bar{t}^2 t + 9\bar{t} t^2 \right] + \\
& + A_{31} \left[\bar{t}^2 t - 2,5\bar{t} t^2 + t^3 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 = & A_{02} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2 t + \bar{t} t^2 \right] + A_{12} \left[9\bar{t}^2 t - 4,5\bar{t} t^2 \right] + A_{22} \left[-4,5\bar{t}^2 t + 9\bar{t} t^2 \right] + \\
& + A_{32} \left[\bar{t}^2 t - 2,5\bar{t} t^2 + t^3 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_4 = & A_{03} \left[\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2 t + \bar{t} t^2 \right] + A_{13} \left[9\bar{t}^2 t - 4,5\bar{t} t^2 \right] + A_{23} \left[-4,5\bar{t}^2 t + 9\bar{t} t^2 \right] + \\
& + A_{33} \left[\bar{t}^2 t - 2,5\bar{t} t^2 + t^3 \right].
\end{aligned}$$

Следует отметить, что на стадии построения горизонталей необходимо делать проверку, чтобы параметр τ , выраженный через параметр t , принадлежал интервалу $[0; 1]$. Иначе получим некоторый фрагмент горизонтали за пределами отсека топографической поверхности.

Переходя от точечных уравнений к параметрическим, для трёхмерного пространства, получим:

$$\begin{aligned}
x_M &= \left(x_{A_{00}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + x_{A_{10}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [\bar{\tau}^3 - 2,5\bar{\tau}^2\tau + \bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(x_{A_{20}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + x_{A_{30}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(x_{A_{01}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + x_{A_{11}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [9\bar{\tau}^2\tau - 4,5\bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(x_{A_{21}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + x_{A_{31}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(x_{A_{02}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + x_{A_{12}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [-4,5\bar{\tau}^2\tau + 9\bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(x_{A_{22}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + x_{A_{32}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(x_{A_{03}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + x_{A_{13}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [\bar{\tau}^2\tau - 2,5\bar{\tau}\tau^2 + \tau^3]; \\
&+ \left(x_{A_{23}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + x_{A_{33}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
y_M &= \left(y_{A_{00}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + y_{A_{10}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [\bar{\tau}^3 - 2,5\bar{\tau}^2\tau + \bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(y_{A_{20}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + y_{A_{30}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(y_{A_{01}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + y_{A_{11}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [9\bar{\tau}^2\tau - 4,5\bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(y_{A_{21}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + y_{A_{31}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(y_{A_{02}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + y_{A_{12}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [-4,5\bar{\tau}^2\tau + 9\bar{\tau}\tau^2] + \\
&+ \left(y_{A_{22}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + y_{A_{32}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
&+ \left(y_{A_{03}} [\bar{t}^3 - 2,5\bar{t}^2t + \bar{t}t^2] + y_{A_{13}} [9\bar{t}^2t - 4,5\bar{t}t^2] + \right) [\bar{\tau}^2\tau - 2,5\bar{\tau}\tau^2 + \tau^3]; \\
&+ \left(y_{A_{23}} [-4,5\bar{t}^2t + 9\bar{t}t^2] + y_{A_{33}} [\bar{t}^2t - 2,5\bar{t}t^2 + t^3] \right) \\
z_M &= h_i.
\end{aligned}$$

4. Переходим к следующей высотной отметке и повторяем вычисления.

Используя предложенный алгоритм можно получить необходимое количество горизонталей любой заданной плотности. Причём если необходимо использовать горизонтальную проекцию горизонтали, то достаточно $z_M = 0$, в противном случае будем иметь горизонтали топографической поверхности в виде множества плоских сечений, расположенных в 3-мерном пространстве.

3.2 Вычислительный алгоритм формирования линий вероятного водотока на топографической поверхности

Важное значение для анализа геодезических характеристик земельного участка занимают расположение и направление линий наибольшего уклона, которые характеризуют сток воды по поверхности. Такой анализ позволяет определить вероятные траектории движения воды на участке топографической поверхности, а это даёт представление о движении различных веществ (пестицидов на поле, растительного мусора, возможный смыв поверхностного грунта и т.п.). Значительную роль линии наибольшего уклона играют в мелиоративной деятельности на землях сельскохозяйственного назначения – как траектории орошения, как противодействие эрозионным процессам и прочее. Поэтому задачу построения линий вероятного водотока можно считать актуальной и востребованной, решение которой позволяет применить цифровые модели поверхности земельного участка для определения скорости развития эрозионных процессов на землях сельскохозяйственного назначения [123] и создаёт предпосылки для разработки автоматизированной системы мониторинга состояния грунтов.

В литературе встречается достаточно большой круг исследований, посвященных построению линий наибольшего уклона на топографической поверхности. Из-за сложности аналитического представления топографической поверхности широкое распространение получил графический метод решения этой задачи, известный из начертательной геометрии. Кроме того были разработаны численные методы решения этой задачи на основе дискретных методов построения цифровых моделей рельефа местности [124, 125].

В БН-исчислении подобная задача была рассмотрена в работе Кучеренко В.В. [41, с. 234], в которой автор приводит алгоритмы построения горизонталей и линий наибольшего уклона для построения водотока на дискретно заданной поверхности, используя методы вариативного дискретного геометрического моделирования [43, с. 250] и математический аппарат БН-исчисления. Однако эти

алгоритмы относятся исключительно к тем методам задания топографической поверхности, которые автор использовал в своей работе. Применительно к способу аналитического описания топографической поверхности на основе 16-точечных отсеков [122, с. 134-138], алгоритмы, представленные в работе, предложены впервые.

Для аналитического описания линий вероятного водотока воспользуемся математическим аппаратом – БН-исчисление, который позволяет представить известный из начертательной геометрии алгоритм построения линий вероятного водотока в виде последовательности точечных уравнений.

Линии вероятного водотока, как линии наибольшего уклона, топографической поверхности определим как кратчайшее расстояние между соседними горизонталями с помощью дифференциального исчисления [126]. С учётом полученных уравнений горизонтали отсека топографической поверхности предлагается следующий принципиальный алгоритм построения линий вероятного водотока:

1. Выбираем горизонталь, имеющую наибольшую высотную отметку и выделяем на ней исходную точку N_i .

2. Выбираем соответствующую друг другу пару точек: исходная точка N_i – текущая точка соседней горизонтали M_i , уравнение которой получено ранее на основе предыдущего алгоритма.

3. Определяем с помощью метрического оператора трёх точек прямой квадрат длины отрезка, соединяющую исходную точку с текущей точкой соседней горизонтали.

$$(N_i M_i)^2 = \sum_{N_i}^{M_i} = \sum (N_i - M_i)^2.$$

Таким образом, представляем квадрат длины отрезка как функцию от текущего параметра t . Далее нужно определить такое значение параметра t , при котором длина отрезка $N_i M_i$ будет минимальной.

4. Минимизируем квадрат длины отрезка $N_i M_i$. Для этого находим производную функции длины отрезка по параметру t и приравниваем её к нулю.

$$\left(N_i M_i^2\right)'_t = 0.$$

5. Решив полученное уравнение, получим несколько значений параметра t , при котором достигаются экстремальные значения квадрата длины, отрезка $N_i M_i$. Выбираем из корней уравнения только те, которые принадлежат интервалу $[0; 1]$. Если таких значений будет несколько, то необходимо сделать обратную подстановку в точечное уравнение длины отрезка $N_i M_i$ и выбрать из полученных значений то, которое соответствует минимальной длине отрезка $N_i M_i$.

6. Подставляем полученное значение параметра t в уравнение соответствующей горизонтали и таким образом определяем точку K_i , которая и определяет отрезок линии наибольшего уклона топографической поверхности.

7. Далее сдвигаемся на одну горизонталь вниз и повторяем алгоритм, только в качестве исходной точки выбираем точку, полученную ранее на предыдущей горизонтали, т.е. $N_{i+1} = K_i$.

Таким образом, получим вычислительный алгоритм построения линий вероятного водотока на топографической поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков, который может быть использован для разработки автоматизированной системы мониторинга состояния грунтов. Следует отметить, что вычислительные алгоритмы построения горизонталей и линий водотока получены на основе геометрических алгоритмов построения геометрических объектов, обладающим наперед заданными свойствами, и являются инвариантными по отношению к любому способу определения поверхности в БН-исчислении. Т.е. эти же алгоритмы могут быть использованы для определения линий вероятного водотока участка топографической поверхности, состоящего, например, из 9-точечных отсеков (план 3×3) или 12-точечных (план 3×4 или 4×3).

3.3 Определение площадей сегментов топографической поверхности методами БН-исчисления

В связи с возрастающей ролью геодезического обеспечения и географических информационных систем (ГИС) повышаются требования к точности выполняемых работ в издаваемых нормативных документах. Так, расхождение между вновь полученной площадью и указанной в имеющихся документах допускается не более 1/1000 для участков в 12 га на застроенных территориях [127]. Окончательное значение площади для любых категорий земель записывается в правоустанавливающие документы в квадратных метрах с округлением до 1 м². Следовательно, погрешность вычисления площади участка не должна превышать 0,3 м². Высокие требования к точности определения площади предъявляются при решении задач экологического контроля и управления городскими территориями, когда необходимо найти с погрешностью не более 1 м³ объёмы объектов, возникших в результате антропогенной деятельности. Исходя из этого, можно сделать вывод об исключительной важности разработки такого способа определения площади участка топографической поверхности, который бы отвечал всем необходимым критериям точности, установленным нормативной документацией.

Поскольку вычислительный алгоритм моделирования участка топографической поверхности представлен в точечной форме, которая сводится к параметрическим уравнениям, для определения площади 16-точечного отсека и вместе с ним площади всего участка топографической поверхности удобно использовать коэффициенты первой квадратичной формы. В соответствии с интегральным исчислением [128] площадь отсека поверхности определяется следующим двойным интегралом:

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dt d\tau, \quad (48)$$

где D – область определения функции;

E, G, F – коэффициенты первой квадратичной формы, которые определяются по формулам:

$$\begin{aligned} E &= \left| r'_t \right|^2 = x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t; \\ G &= \left| r'_\tau \right|^2 = x'^2_\tau + y'^2_\tau + z'^2_\tau; \\ F &= (r'_t \cdot r'_\tau) = x'_t x'_\tau + y'_t y'_\tau + z'_t z'_\tau. \end{aligned} \quad (49)$$

Для определения площади на топографических картах и планах, исходя из совокупности исходных данных, удобно использовать другой способ определения площади. Перейдем к рассмотрению проекций с числовыми отметками трехмерного пространства в глобальной декартовой системе координат OE_1E_2H . Отсек топографической поверхности в декартовой системе координат приведен на рисунке 28. Координатную плоскость xOy примем за нулевую, где, расчетный алгоритм с координатами x и y 16-ти точек задает замкнутую область – Ω -заложение (криволинейный четырехугольник, выделенный на рисунке 28 толстыми дугами кривых). Высотные отметки h_{ij} отождествим с координатой z , то есть примем $E_3 \equiv H$.

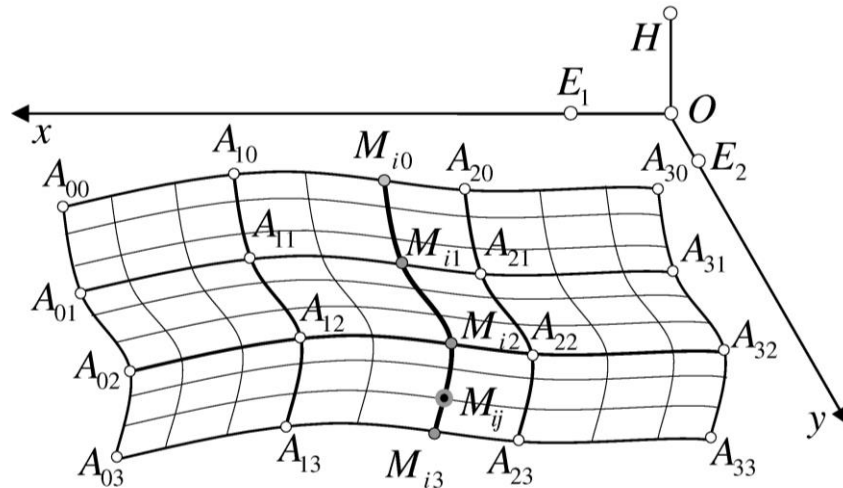


Рисунок 28 – Отсек топографической поверхности в декартовой системе координат

В соответствии с [128, с. 560], площадь отсека топографической поверхности определяется с помощью двойного интеграла:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (50)$$

Производя замену переменных в двойном интеграле (50), получим:

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} |I| dt d\tau, \quad (51)$$

где $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ – определитель матрицы Якоби.

Далее, возникает задача определения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ из точечного уравнения (52).

Точечное уравнение образующей отсека топографической поверхности:

$$M_{ij} = (M_{i0}\bar{\tau} + M_{i3}\tau) \frac{2 - 9\bar{\tau}\tau}{2} + \frac{9\bar{\tau}\tau [M_{i1}(2 - 3\tau) + M_{i2}(3\tau - 1)]}{2}, \quad (52)$$

где $0 \leq \tau \leq 1$.

Зададим отсек топографической поверхности в параметрическом виде:

$$\begin{cases} 2x = (x_{i0}\bar{\tau} + x_{i3}\tau)(2 - 9\bar{\tau}\tau) + 9\bar{\tau}\tau [x_{i1}(2 - 3\tau) + x_{i2}(3\tau - 1)]; \\ 2y = (y_{i0}\bar{\tau} + y_{i3}\tau)(2 - 9\bar{\tau}\tau) + 9\bar{\tau}\tau [y_{i1}(2 - 3\tau) + y_{i2}(3\tau - 1)]; \\ 2z = (z_{i0}\bar{\tau} + z_{i3}\tau)(2 - 9\bar{\tau}\tau) + 9\bar{\tau}\tau [z_{i1}(2 - 3\tau) + z_{i2}(3\tau - 1)], \end{cases} \quad (53)$$

где $2x_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{10}(2 - 3t) + A_{20}(3t - 1)];$

$2y_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{10}(2 - 3t) + A_{20}(3t - 1)];$

$2z_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{10}(2 - 3t) + A_{20}(3t - 1)];$

$2x_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{11}(2 - 3t) + A_{21}(3t - 1)];$

$2y_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{11}(2 - 3t) + A_{21}(3t - 1)];$

$2z_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{11}(2 - 3t) + A_{21}(3t - 1)];$

$2x_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{12}(2 - 3t) + A_{22}(3t - 1)];$

$2y_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{12}(2 - 3t) + A_{22}(3t - 1)];$

$2z_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{12}(2 - 3t) + A_{22}(3t - 1)];$

$2x_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{13}(2 - 3t) + A_{23}(3t - 1)];$

$2y_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{13}(2 - 3t) + A_{23}(3t - 1)];$

$2z_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t [A_{13}(2 - 3t) + A_{23}(3t - 1)].$

Из системы параметрических уравнений (53) выделим высотные отметки:

$$2z = (z_{i0}\bar{\tau} + z_{i3}\tau)(2 - 9\bar{\tau}\tau) + 9\bar{\tau}\tau[z_{i1}(2 - 3\tau) + z_{i2}(3\tau - 1)], \quad (54)$$

где $2z_{i0} = (A_{00}\bar{t} + A_{30}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t[A_{10}(2 - 3t) + A_{20}(3t - 1)],$

$$2z_{i3} = (A_{03}\bar{t} + A_{33}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t[A_{13}(2 - 3t) + A_{23}(3t - 1)],$$

$$2z_{i1} = (A_{01}\bar{t} + A_{31}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t[A_{11}(2 - 3t) + A_{21}(3t - 1)],$$

$$2z_{i2} = (A_{02}\bar{t} + A_{32}t)(2 - 9\bar{t}t) + 9\bar{t}t[A_{12}(2 - 3t) + A_{22}(3t - 1)].$$

Заложение Ω определяется его горизонтальной проекцией:

$$M_{xy} = (M_{i0}\bar{\tau} + M_{i3}\tau) \frac{2 - 9\bar{\tau}\tau}{2} + \frac{9\bar{\tau}\tau[M_{i1}(2 - 3\tau) + M_{i2}(3\tau - 1)]}{2}. \quad (55)$$

Для удобства дифференцирования преобразуем точечное уравнение (55):

$$\begin{aligned} M &= (M_{i0}\bar{\tau} + M_{i3}\tau) \frac{2 - 9\bar{\tau}\tau}{2} + \frac{9\bar{\tau}\tau[M_{i1}(2 - 3\tau) + M_{i2}(3\tau - 1)]}{2} = \\ &= 4,5\tau^3(3M_{i1} - 3M_{i2} - M_{i0} + M_{i3}) + 4,5\tau^2(4M_{i2} + 2M_{i0} - 5M_{i1} - M_{i3}) + \\ &\quad + \tau(M_{i3} + 9M_{i1} - 4,5M_{i2} - 5,5M_{i0}) + M_{i0}. \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное уравнение по параметру τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \tau} &= 13,5\tau^2(3M_{i1} - 3M_{i2} - M_{i0} + M_{i3}) + 9\tau(4M_{i2} + 2M_{i0} - 5M_{i1} - M_{i3}) + \\ &\quad + M_{i3} + 9M_{i1} - 4,5M_{i2} - 5,5M_{i0}. \end{aligned}$$

Откуда получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \tau} &= 13,5\tau^2(3z_{i1} - 3z_{i2} - z_{i0} + z_{i3}) + \\ &\quad + 9\tau(4z_{i2} + 2z_{i0} - 5z_{i1} - z_{i3}) + z_{i3} + 9z_{i1} - 4,5z_{i2} - 5,5z_{i0}; \\ \frac{\partial x}{\partial \tau} &= 13,5\tau^2(3x_{i1} - 3x_{i2} - x_{i0} + x_{i3}) + \\ &\quad + 9\tau(4x_{i2} + 2x_{i0} - 5x_{i1} - x_{i3}) + x_{i3} + 9x_{i1} - 4,5x_{i2} - 5,5x_{i0}; \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} &= 13,5\tau^2(3y_{i1} - 3y_{i2} - y_{i0} + y_{i3}) + \\ &\quad + 9\tau(4y_{i2} + 2y_{i0} - 5y_{i1} - y_{i3}) + y_{i3} + 9y_{i1} - 4,5y_{i2} - 5,5y_{i0}. \end{aligned}$$

Искомая площадь отсека топографической поверхности определяется двукратным интегралом (51), для которого имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{13,5k_{z1}\tau^2 + 9k_{z2}\tau + z_{i3} + 9z_{i1} - 4,5z_{i2} - 5,5z_{i0}}{13,5k_{x1}\tau^2 + 9k_{x2}\tau + x_{i3} + 9x_{i1} - 4,5x_{i2} - 5,5x_{i0}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{13,5\tau^2k_{z1} + 9\tau k_{z2} + z_{i3} + 9z_{i1} - 4,5z_{i2} - 5,5z_{i0}}{13,5k_{y1}\tau^2 + 9k_{y2}\tau + y_{i3} + 9y_{i1} - 4,5y_{i2} - 5,5y_{i0}},\end{aligned}\quad (56)$$

где $k_{x1} = 3x_{i1} - 3x_{i2} - x_{i0} + x_{i3}$;

$$k_{x2} = 4x_{i2} + 2x_{i0} - 5x_{i1} - x_{i3};$$

$$k_{y1} = 3y_{i1} - 3y_{i2} - y_{i0} + y_{i3};$$

$$k_{y2} = 4y_{i2} + 2y_{i0} - 5y_{i1} - y_{i3};$$

$$k_{z1} = 3z_{i1} - 3z_{i2} - z_{i0} + z_{i3};$$

$$k_{z2} = 4z_{i2} + 2z_{i0} - 5z_{i1} - z_{i3}.$$

Вычислительный алгоритм необходимо выполнять в обратном порядке. Сначала дифференцируют уравнение (55) в покоординатной форме по параметру τ с учетом уравнений (56). После чего определяют значение площади отсека топографической поверхности, используя соотношение (51).

Площадь всего участка топографической поверхности определяется суммой площадей 16-точечных отсеков, из которых он состоит.

С помощью предложенных способов вычисления площади участка топографической поверхности проверим точность аппроксимации, предложенного нами способа моделирования нерегулярной поверхности. В качестве эталонной поверхности был использован отсек сферы (Рисунок 29), для которого была определена эталонная площадь с помощью поверхностного интеграла.

Параметрическое уравнение сферы с центром в начале координат имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin(t) \cdot \cos(\tau); \\ y = R \cdot \sin(t) \cdot \sin(\tau); \\ z = R \cdot \cos(t). \end{cases}\quad (57)$$

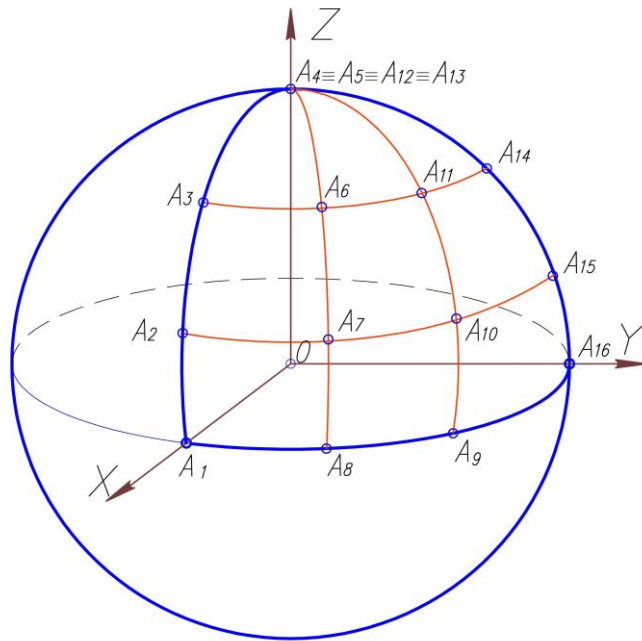


Рисунок 29 – Определение площади эталонной сферы единичного радиуса

Для удобства вычислений принимаем радиус сферы $R=1$. Поскольку радиус всё равно выносится из подынтегральной функции и никак не влияет на результаты сравнения. Учитывая симметрию сферической поверхности, ограничим значения параметров в пределах $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$, описывая таким образом $\frac{1}{8}$ часть сферы.

Сравнение производилось с моделью TIN для регулярной и нерегулярной сети точек. При использовании регулярной сети точек погрешность моделирования предложенного нами способа составила 0,25%, а при использовании модели TIN – 5,61% (Рисунок 30).

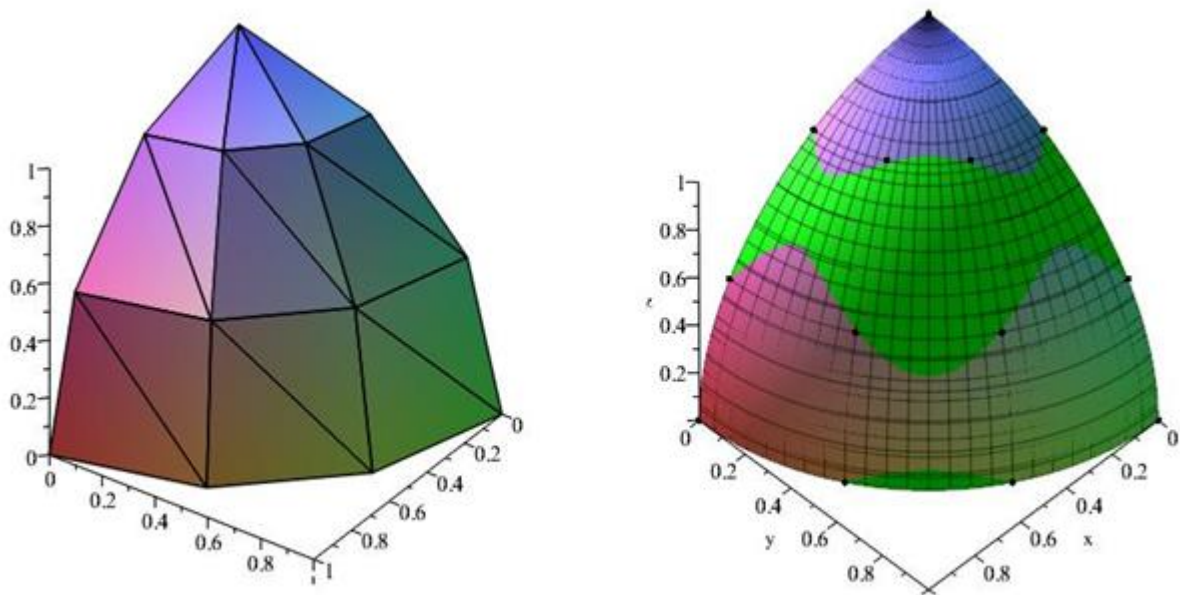


Рисунок 30 – Модели отсека сферической поверхности, построенные на регулярной сети точек

При использовании нерегулярной сети точек погрешность моделирования предложенного нами способа составила 0,14%, а при использовании модели TIN – 6,24%. Следует отметить, что погрешность моделирования поверхности на нерегулярной сети точек в значительной мере зависит от расположения исходных точек на поверхности сферы и может принимать и другие значения (Рисунок 31).

На рисунках 30 и 31 зеленым цветом показана эталонная сферическая поверхность. Листинг программы приводится в приложении Г.

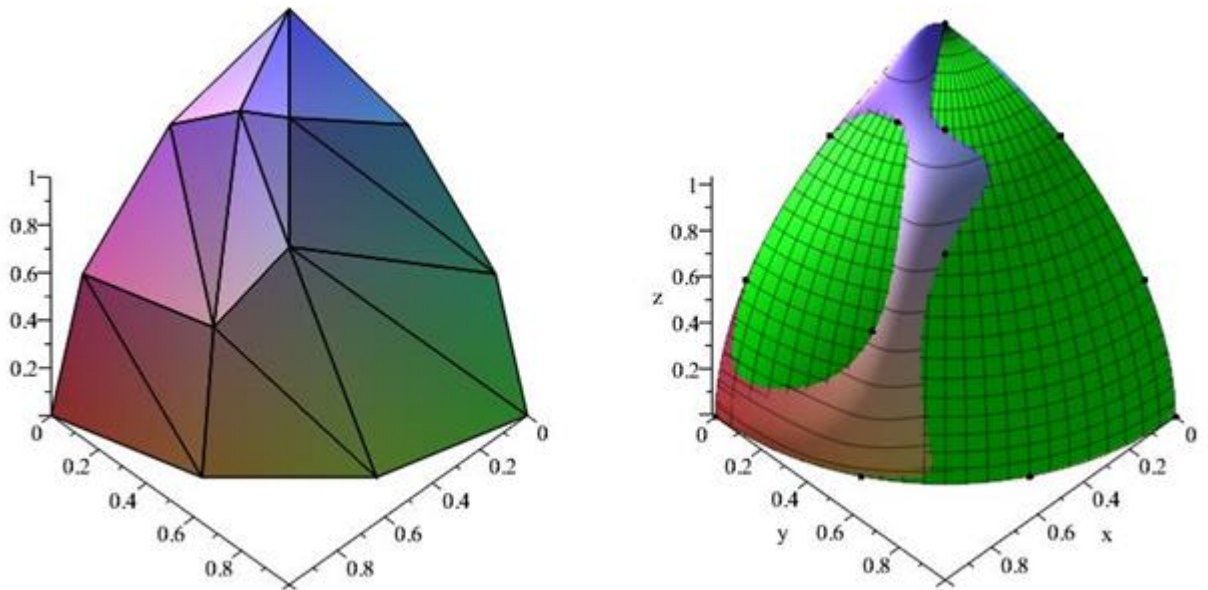


Рисунок 31 – Модели отсека сферической поверхности, построенные на нерегулярной сети точек

3.4 Определение объёмов земляных работ на топографической поверхности

В практике инженерно-геодезических работ одной из широко распространенных задач является определение объемов земляных работ при планировке земной поверхности. Для решения задач вертикальной планировки необходимо определить объем насыпи и выемки. Поэтому сначала рассмотрим методику вычисления объема отсека топографической поверхности, проходящей через 16-ть наперёд заданных точек [111, с. 45-50; 122, с. 134-138], которая определяется следующей последовательностью точечных уравнений (40)-(44).

Перейдём от точечного уравнения (57), которое представляет собой символьную запись, к системе однотипных параметрических уравнений отсека топографической поверхности, проходящей через 16-ть наперед заданных точек:

$$\begin{aligned}
x = & \left(\left[\left(x_{A_{00}} \bar{t} + x_{A_{30}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[x_{A_{10}} (2-3t) + x_{A_{20}} (3t-1) \right]}{2} \right] \bar{\tau} + \right. \\
& \left. + \left[\left(x_{A_{03}} \bar{t} + x_{A_{33}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[x_{A_{13}} (2-3t) + x_{A_{23}} (3t-1) \right]}{2} \right] \tau \right) \frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2} + \\
& + \frac{9\bar{\tau}\tau}{2} \left(\left[\left(x_{A_{01}} \bar{t} + x_{A_{31}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[x_{A_{11}} (2-3t) + x_{A_{21}} (3t-1) \right]}{2} \right] (2-3\tau) + \right. \\
& \left. + \left[\left(x_{A_{02}} \bar{t} + x_{A_{32}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[x_{A_{12}} (2-3t) + x_{A_{22}} (3t-1) \right]}{2} \right] (3\tau-1) \right). \\
y = & \left(\left[\left(y_{A_{00}} \bar{t} + y_{A_{30}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[y_{A_{10}} (2-3t) + y_{A_{20}} (3t-1) \right]}{2} \right] \bar{\tau} + \right. \\
& \left. + \left[\left(y_{A_{03}} \bar{t} + y_{A_{33}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[y_{A_{13}} (2-3t) + y_{A_{23}} (3t-1) \right]}{2} \right] \tau \right) \frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2} + \\
& + \frac{9\bar{\tau}\tau}{2} \left(\left[\left(y_{A_{01}} \bar{t} + y_{A_{31}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[y_{A_{11}} (2-3t) + y_{A_{21}} (3t-1) \right]}{2} \right] (2-3\tau) + \right. \\
& \left. + \left[\left(y_{A_{02}} \bar{t} + y_{A_{32}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[y_{A_{12}} (2-3t) + y_{A_{22}} (3t-1) \right]}{2} \right] (3\tau-1) \right), \\
z = & \left(\left[\left(z_{A_{00}} \bar{t} + z_{A_{30}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[z_{A_{10}} (2-3t) + z_{A_{20}} (3t-1) \right]}{2} \right] \bar{\tau} + \right. \\
& \left. + \left[\left(z_{A_{03}} \bar{t} + z_{A_{33}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[z_{A_{13}} (2-3t) + z_{A_{23}} (3t-1) \right]}{2} \right] \tau \right) \frac{2-9\bar{\tau}\tau}{2} + \\
& + \frac{9\bar{\tau}\tau}{2} \left(\left[\left(z_{A_{01}} \bar{t} + z_{A_{31}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[z_{A_{11}} (2-3t) + z_{A_{21}} (3t-1) \right]}{2} \right] (2-3\tau) + \right. \\
& \left. + \left[\left(z_{A_{02}} \bar{t} + z_{A_{32}} t \right) \frac{2-9\bar{t}t}{2} + \frac{9\bar{t}t \left[z_{A_{12}} (2-3t) + z_{A_{22}} (3t-1) \right]}{2} \right] (3\tau-1) \right).
\end{aligned} \tag{58}$$

Далее находим объём ограниченный криволинейным отсеком топографической поверхности, проходящей через 16-ть наперед заданных точек,

ограниченный снизу горизонтальной плоскостью xOy , с помощью двойного интеграла [128, с. 560; 129]:

$$V = \iint_D z(x, y) dx dy. \quad (59)$$

Производя замену переменных в двойном интеграле (59):

$$\begin{cases} x = x(t, \tau), \\ y = y(t, \tau), \end{cases}$$

получим:

$$V = \iint_D z(x, y) dx dy = \iint_D z(x(t, \tau), y(t, \tau)) \cdot |I| dt d\tau = \iint_D z(t, \tau) \cdot |I| dt d\tau, \quad (60)$$

где $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tau} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \tau} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$ – определитель матрицы Якоби;

$z(t, \tau)$ – параметрическое уравнение координаты z из системы уравнений (58);

$$D = \{0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq 1\} \text{ – область определения функции.}$$

Следует отметить, что при положительном значении объёма V , получим объём выемки, а при отрицательном – насыпи. Это свойство двойного интеграла используется в вычислительном алгоритме вертикальной планировки для определения разницы объёмов выемки и насыпи.

Проверим работоспособность предложенного способа на двух конкретных известных поверхностях. Рассматриваем перевернутый параболоид вращения с вершиной в точке $(0,0,1)$. Эта поверхность похожа на перевернутую чашу (горизонтальная плоскость «дно чаши» – плоскость xOy , т.е. $z=0$). В сечениях, параллельных плоскости xOy – окружности.

$$\text{Рассматриваем две поверхности: } z = 1 - x^2 - y^2 \text{ и } z = 1 - \frac{x^2 + y^2}{81}.$$

Второй параболоид растянут по сравнению с первым (у первого проекция на плоскость xOy – окружность $x^2 + y^2 = 1$ с радиусом 1, а у второго – окружность $x^2 + y^2 = 81$ с радиусом 9).

Для каждого из параболоидов выбираем сетку из 16 точек (т.е. аппроксимируем поверхность с помощью модифицированной дуги кривой Безье 3-го порядка) и вычисляем объем «аппроксимируемой поверхности» и объем параболоида (методом известным из классической математики) в двух случаях. А затем вычисляем относительную погрешность приближения.

Для параболоида $z = 1 - x^2 - y^2$ погрешность вычислений объема составляет 5%, а для параболоида $z = 1 - \frac{x^2 + y^2}{81}$ (более растянутого) – 0,43%. Это говорит о том, что предложенный способ геометрического моделирования участка топографической поверхности проходящей через 16 наперед заданных точек достаточно точно аппроксимирует поверхность параболоида. Если же взять несколько 16-точечных отсеков на поверхности параболоида, это значительно повысит точность вычисления его метрических характеристик.

ВЫВОДЫ ПО ТРЕТЬЕМУ РАЗДЕЛУ

1. Получены точечные и параметрические уравнения горизонталей отсека топографической поверхности и, на их основе, предложен алгоритм формирования линий вероятных водотоков на топографической поверхности, что позволяет рассчитывать площадь водосбора и объем воды, а также определять направления разрушения грунта в результате водной эрозии. Расчеты можно проводить с любой, наперед заданной, плотностью горизонталей; причём увеличение количества горизонталей значительно повышает точность моделирования линий вероятного водотока.

2. Предложен способ расчёта площадей и объёмов отсека топографической поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков, что позволяет решать инженерные задачи на топографической поверхности, и является теоретической

основой для проведения вертикальной планировки на топографической поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков.

3. Выполнена проверка точности аппроксимации эталонной сферической поверхности, предложенного способа моделирования по сравнению с моделью TIN на регулярной и нерегулярной сети точек. В результате предложенный способ аппроксимации поверхности 16-точечным отсеком показал более качественные результаты по отношению к модели TIN.

РАЗДЕЛ 4

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАНИРОВКИ УЧАСТКА ТОПОГРАФИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Вертикальная планировка – это инженерное мероприятие по искусственному изменению, преобразованию и улучшению существующего рельефа местности для использования его в различных целях, к которым относятся:

1. Планировка стройплощадки любых объектов строительства.
2. Подготовка и благоустройство городских территорий и ландшафтных объектов.
3. Подготовка рельефа местности при добыче редкоземельных металлов выщелачиванием.

Важным условием проектирования вертикальной планировки является достижение наибольшего сохранения естественного рельефа местности и наименьшего объема земляных работ. Поэтому задачу о вертикальной планировке, с математической точки зрения, можно отнести к классу оптимизационных. Традиционно минимаксные задачи по оптимизации решаются либо численными методами, либо методами дифференциального исчисления. В данном случае в разделе 2 был предложен способ аппроксимации участка нерегулярной топографической поверхности регулярными 16-точечными отсеками. Отсюда возникает задача об исследовании особенностей вертикальной планировки местности на полученной в результате моделирования нерегулярной топографической поверхности. Для программной реализации вычислительного эксперимента по вертикальной планировке местности, представленной в виде ЦМР, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, был разработан следующий вычислительный алгоритм [112, с. 13-19].

4.1 Вычислительный алгоритм вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности

Рассмотрим принципиальный вычислительный алгоритм для вертикальной планировки участка топографической поверхности с сохранением баланса земляных работ [112, с.13-19]:

1. Определяем минимальную и максимальную точку на топографической поверхности. Поскольку для описания отсека топографической поверхности используется модифицированная дуга кривой Безье 3-го порядка, обладающая в общем случае одной точкой перегиба, то таких точек будет две (Рисунок 32).

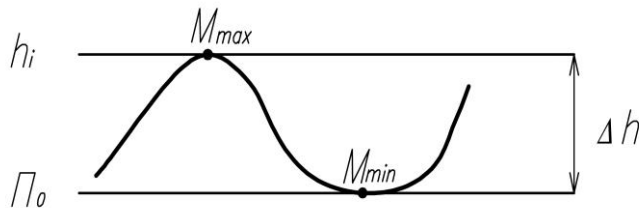


Рисунок 32 – Определение минимальной и максимальной точки

2. Вычисляем разницу $\Delta h = h_{max} - h_{min}$ между высотными отметками минимума и максимума (Рисунок 32).

МОВ
выемки и насыпи ΔV , определяя объём с помощью формулы (44), для каждого слоя, формируя тем самым массив исходных данных для моделирования. Причём, если горизонтальная плоскость, ограничивающая отсек топографической поверхности является нулевой, то разность объёмов выемки и насыпи можно определить из выражения (60). А если горизонтальная плоскость имеет высотную отметку отличную от нуля, то разность объёмов выемки и насыпи на которую она делит отсек топографической поверхности, можно получить из соотношения (60) следующим образом:

$$\Delta V_i = \iint_D [z(t, \tau) - h_i] |I| dt d\tau. \quad (61)$$

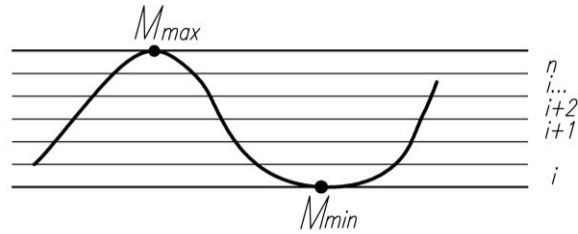


Рисунок 33 – Разбивка на слои

4. Моделируем точечное уравнение зависимости разности объёмов выемки и насыпи $\Delta V_i = V_i^B - V_i^H$ от высотной отметки секущей плоскости h_i (Рисунок 34):

$$\Delta V = f(h).$$

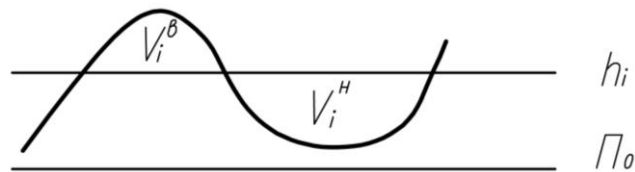


Рисунок 34 – К определению объёмов выемки и насыпи

5. Для соблюдения баланса земляных работ необходимо чтобы объёмы выемки и насыпи были равны, а их разница, соответственно, была равна нулю. Решая полученное уравнение, находим такое значение высотной отметки h , при которой $\Delta V = 0$.

6. Из полученных корней уравнения выбираем значение h , соответствующее интервалу $[0; 1]$.

7. Подставляем полученное значение h в уравнение $\Delta V = f(h)$ и, таким образом, определяем рабочую высотную отметку.

Основная идея заключается в моделировании уравнения зависимости разности между объемом выемки и насыпи от предполагаемой высотной отметки уровня нулевых работ, с последующим определением такого значения высотной отметки, при котором разность объемов выемки и насыпи будет равна нулю. Исследуем предложенный вычислительный алгоритм путём проведения

вычислительных экспериментов на регулярной и нерегулярной сети исходных точек.

4.2 Вычислительные эксперименты по вертикальной планировке участка топографической поверхности

Рассмотрим контрольный пример для проверки работоспособности предложенного алгоритма. В качестве примера зададим координаты 16 точек, определив отсек топографической поверхности на прямоугольном плане (Таблица 2). Следует отметить, что план (горизонтальная проекция) может быть вообще любой формы, но при использовании прямоугольных (а также квадратных) планов, легче стыковать отсеки топографической поверхности между собой.

Таблица 2 - Координаты точек отсека топографической поверхности на прямоугольном плане

Наименование точек	Координаты точек		
	x	y	z
A_{00}	68	10	-0,5
A_{10}	68	40	3
A_{20}	68	70	0
A_{30}	68	95	-2
A_{01}	53	10	2
A_{11}	53	40	-5
A_{21}	53	70	-3
A_{31}	53	95	0
A_{02}	34	10	3
A_{12}	34	40	5
A_{22}	34	70	7
A_{32}	34	95	2
A_{03}	20	10	0
A_{13}	20	40	-3
A_{23}	20	70	5
A_{33}	20	95	-4

Воспользуемся программным пакетом Maple для построения отсека топографической поверхности с помощью последовательности точечных уравнений (40)-(44). Визуализация полученного отсека топографической поверхности представлена на рисунке 35.

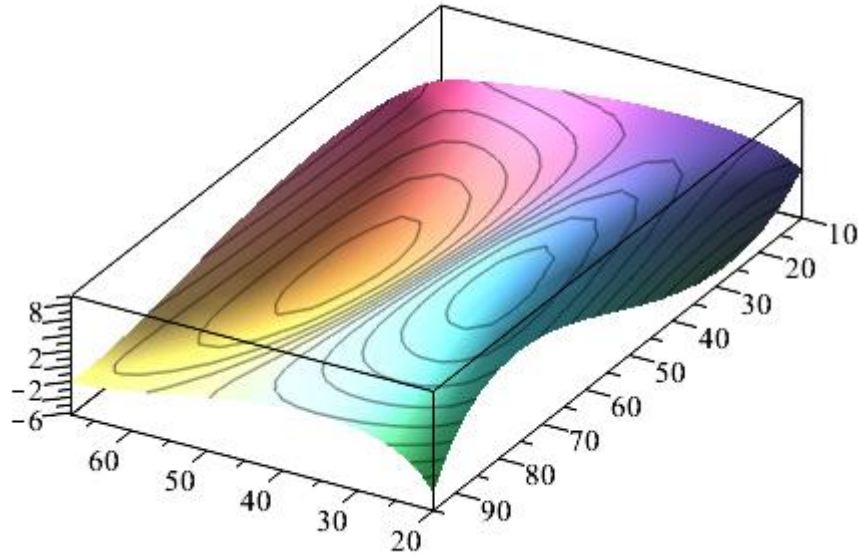


Рисунок 35 – Визуализация отсека топографической поверхности

Далее определяем максимальное и минимальное значения высотных отметок отсека топографической поверхности (h_{\min} и h_{\max}). Для этого находим частные производные и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_t = 0; \\ z'_\tau = 0. \end{cases}$$

Дополнительно необходимо исследовать границы отсека топографической поверхности, уравнения которых легко определить, подставляя поочередно для каждого из параметров значения 0 и 1. В результате получим следующие значения: $h_{\min} \approx -6,324$ при $t = 0,408$ и $\tau = 0,229$, а $h_{\max} \approx 9,096$ при $t = 0,649$ и $\tau = 0,818$.

Далее определяем текущую высотную отметку h_i : $h_i = h_{\min} + i(h_{\max} - h_{\min})$ и для каждой полученной высотной отметки h_i определяем разницу объёмов выемки и насыпи ΔV_i с помощью зависимости (61). В контрольном примере разница высотных отметок $\Delta h = h_{\max} - h_{\min}$ была разбита на 4 части. Полученные значения высотных отметок и разностей объёмов приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Исходные данные для моделирования зависимости разности объёмов выемки и насыпи от высотной отметки секущей плоскости

№ п/п	Высотная отметка секущей плоскости h_i	Разница объёмов выемки и насыпи ΔV_i
1	-6,324	-29642,65
2	-2,469	-13913,73
3	1,386	1815,18
4	5,241	17544,09
5	9,096	33273,01

Воспользуемся точечным уравнением дуги кривой 4-го порядка, проходящей через 5 наперед заданных точек [35, с. 164], для моделирования зависимости разности объёмов выемки и насыпи от высотной отметки секущей плоскости:

$$\begin{aligned}
 M = & M_1 \left(\bar{u}^4 - \frac{13}{3} \bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \bar{u} u^3 \right) + M_2 \left(16 \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + \frac{16}{3} \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + M_3 \left(-12 \bar{u}^3 u + 40 \bar{u}^2 u^2 - 12 \bar{u} u^3 \right) + M_4 \left(\frac{16}{3} \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + 16 \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + M_5 \left(-\bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \frac{13}{3} \bar{u} u^3 + u^4 \right).
 \end{aligned}$$

Переходя к параметрическим уравнениям, получим:

$$\begin{aligned}
 x_M = & x_{M_1} \left(\bar{u}^4 - \frac{13}{3} \bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \bar{u} u^3 \right) + x_{M_2} \left(16 \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + \frac{16}{3} \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + x_{M_3} \left(-12 \bar{u}^3 u + 40 \bar{u}^2 u^2 - 12 \bar{u} u^3 \right) + x_{M_4} \left(\frac{16}{3} \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + 16 \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + x_{M_5} \left(-\bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \frac{13}{3} \bar{u} u^3 + u^4 \right); \\
 y_M = & y_{M_1} \left(\bar{u}^4 - \frac{13}{3} \bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \bar{u} u^3 \right) + y_{M_2} \left(16 \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + \frac{16}{3} \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + y_{M_3} \left(-12 \bar{u}^3 u + 40 \bar{u}^2 u^2 - 12 \bar{u} u^3 \right) + y_{M_4} \left(\frac{16}{3} \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + 16 \bar{u} u^3 \right) + \\
 & + y_{M_5} \left(-\bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \frac{13}{3} \bar{u} u^3 + u^4 \right);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_M = & z_{M_1} \left(\bar{u}^4 - \frac{13}{3} \bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \bar{u} u^3 \right) + z_{M_2} \left(16 \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + \frac{16}{3} \bar{u} u^3 \right) + \\
& + z_{M_3} \left(-12 \bar{u}^3 u + 40 \bar{u}^2 u^2 - 12 \bar{u} u^3 \right) + z_{M_4} \left(\frac{16}{3} \bar{u}^3 u - \frac{64}{3} \bar{u}^2 u^2 + 16 \bar{u} u^3 \right) + \\
& + z_{M_5} \left(-\bar{u}^3 u + \frac{13}{3} \bar{u}^2 u^2 - \frac{13}{3} \bar{u} u^3 + u^4 \right).
\end{aligned}$$

В результате получим линейную зависимость (Рисунок 36).

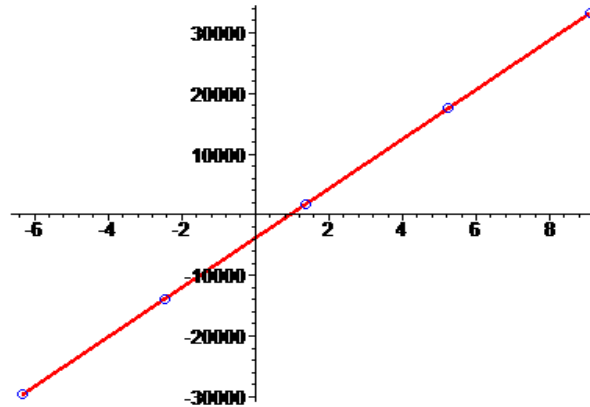


Рисунок 36 – Визуализация зависимости ΔV_i от h_i

Приравнивая значение $\Delta V = 0$ и решив полученное уравнение на интервале значений параметра u от 0 до 1, получим значение высотной отметки $h_0 = 0,411$, при котором объём выемки будет приблизительно равен объёму насыпи. Листинг программы приводится в приложении Д.

Для проверки подставим значение высотной отметки $h_0 = 0,411$ и определим разницу объёмов выемки и насыпи: $\Delta V \approx -0,001$. Таким образом, погрешность вычислений составила 0,1%.

В качестве 2-го контрольного примера воспользуемся геометрической моделью участка топографической поверхности, расположенной в верховьях балки Каменская (г. Лисичанск), которая была получена во 2-й главе. Для определения минимальной и максимальной точки участка топографической поверхности был сформирован цикл, который перебирая значения на каждом участке, определил искомые значения. В результате максимальное значение

высотной отметки $h_{\max} = 190,4$ принадлежит 16-му 16-точечному отсеку, а минимальное – $h_{\min} = 105,07$ 10-му 16-точечному отсеку.

В соответствии с вычислительным алгоритмом разобьем разницу высотных отметок на 4 части и определим для каждой разницу объёмов выемки и насыпи (Таблица 4).

Таблица 4 – Исходные данные для моделирования

№ п/п	Высотная отметка секущей плоскости h_i , м	Разница объёмов выемки и насыпи ΔV_i , м ³
1	105,07	5053355
2	126,41	3254023
3	147,74	1454691
4	169,07	-344641
5	190,4	-2143973

Используем точечное уравнение дуги кривой 4-го порядка, проходящей через 5 наперед заданных точек [35, с. 164], для моделирования зависимости разности объёмов выемки и насыпи от высотной отметки секущей плоскости. В результате опять получим линейную зависимость (Рисунок 37). При этом искомая высотная отметка $h_0 = 164,985$.

Другие контрольные примеры также выявили линейную зависимость разности объёмов выемки и насыпи от высотных отметок секущей плоскости. Тогда можно считать экспериментально доказанным следующее утверждение.

Утверждение. *Разность объёмов выемки и насыпи имеет линейную зависимость от высотных отметок секущей плоскости для всех геометрических моделей участка топографической поверхности, состоящих из регулярных 16-точечных отсеков, которые определяются последовательностью точечных уравнений (40)-(44).*

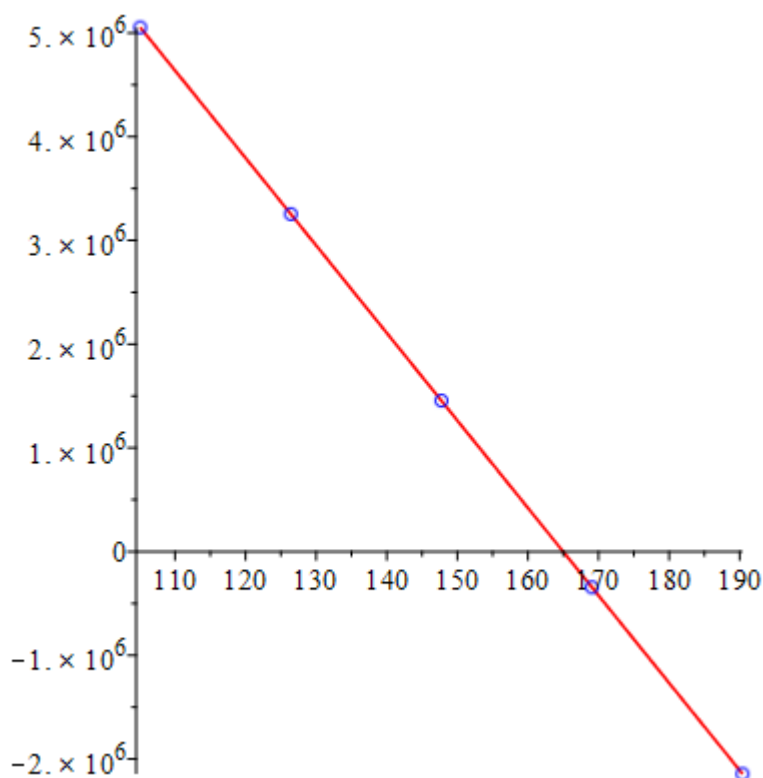


Рисунок 37 – Визуализация зависимости ΔV_i от h_i

Основываясь на этом утверждении, предложенный ранее вычислительный алгоритм вертикальной планировки можно значительно упростить. В таком случае выполнив интегрирование по формуле (61) и сложив полученные разности объёмов выемки и насыпи регулярных 16-точечных отсеков сразу получим линейную зависимость:

$$\Delta V = ah + b, \quad (62)$$

где a и b – вычисляются в зависимости от формы топографической поверхности в зависимости от определяющих её исходных точек.

4.3 Вертикальная планировка участка топографической поверхности с учётом поправки на показатель разрыхления грунта

В подразделах 4.1 и 4.2 предложена и обоснована с помощью вычислительных экспериментов методика вертикальной планировки с сохранением баланса земляных работ, основанная на аппроксимации участка

топографической поверхности регулярными 16-точечными отсеками. Однако предложенный алгоритм даёт, в некотором смысле, идеализированный результат. Т.е. фактически задача решается в математической постановке. В инженерной постановке задачу вертикальной планировки следует решать с учётом показателей разрыхления грунтов и пород, поскольку при передвижении грунта из выемки в насыпь грунт до той же плотности уплотнить невозможно, так чтобы он был в плотном состоянии залегающего грунта. Это приводит к необходимости пересчёта объема грунта, замеренного в отвале или насыпи, в объем, соответствующий естественной плотности грунта или породы, а это, в свою очередь, приводит к необходимости корректировки высотной отметки плоскости уровня земляных работ. Корректировка объёма грунта выполняется в соответствии с приложением 2 [130]. В приложении 2 приводится таблица правила расчета объема грунта с учётом показателей разрыхления грунтов и пород (Таблица 5).

Таблица 5 – Показатели разрыхления грунтов и пород

Наименование грунта	Первоначальное увеличение объема грунта после разработки k_p	Остаточное разрыхление грунта
1. Глина ломовая	0,28-0,32	0,06-0,09
2. Глина мягкая жирная	0,24-0,3	0,04-0,07
3. Глина сланцевая	0,28-0,32	0,06-0,09
4. Гравийно-галечные грунты	0,16-0,2	0,05-0,08
5. Растительный грунт	0,2-0,25	0,03-0,04
6. Лесс мягкий	0,18-0,24	0,03-0,06
7. Лесс твердый	0,24-0,3	0,04-0,07
8. Мергель	0,33-0,37	0,11-0,15
9. Опока	0,33-0,37	0,11-0,15
10. Песок	0,1-0,15	0,02-0,05
11. Разборно-скальные грунты	0,3-0,45	0,15-0,2
12. Скальные грунты	0,45-0,5	0,2-0,3
13. Солончак и солонец мягкие	0,2-0,26	0,03-0,06
14. Солончак и солонец твердые	0,28-0,32	0,05-0,09
15. Суглинок легкий и лессовидный	0,18-0,24	0,03-0,06
16. Суглинок тяжелый	0,24-0,3	0,05-0,08
17. Супесь	0,12-0,17	0,03-0,05
18. Торф	0,24-0,3	0,08-0,01
19. Чернозем и каштановый грунт	0,22-0,28	0,05-0,07
20. Шлак	0,14-0,18	0,08-0,1

Учитывая линейную взаимосвязь между высотной отметкой и объёмом грунта, получим поправочную зависимость для значений проектных высотных отметок $h_{\text{ПР}}$ с учётом показателя разрыхления грунта k_p :

$$h_{\text{ПР}} = h \frac{2 + 2k_p}{2 + k_p}, \quad (63)$$

где h – высотная отметка, полученная из уравнения (62) при $\Delta V = 0$.

ВЫВОДЫ ПО ЧЕТВЕРТОМУ РАЗДЕЛУ

1. Представлена методика расчета объема отсека топографической поверхности, которая проходит через 16-ть наперед заданных точек. Предложен вычислительный алгоритм вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности с сохранением баланса земляных работ на основе геометрического моделирования зависимости разностей объёмов выемки и насыпи от высотных отметок горизонтальных плоскостей уровня. Это позволяет не только минимизировать объём выполнения работ по транспортировке грунта при конструировании горизонтальной площадки на топографической поверхности, но и потерю редкоземельных металлов при их добыче выщелачиванием.

2. Установлена линейная зависимость между высотными отметками и разностью объёмов выемки и насыпи, установленная для определения проектной отметки вертикальной планировки цифровой модели рельефа местности, полученной на основе криволинейных регулярных 16-точечных отсеков поверхности, что позволяет в значительной мере сократить процесс вертикальной планировки местности с соблюдением баланса земляных работ и с учётом поправки на показатель разрыхления грунта.

3. Внедрены результаты исследований в практику подготовки проектной документации (справка о внедрении № 51416 от 13.02.17 г. выдана отделом архитектуры и градостроительства администрации города Ясиноватая для

составления проектной документации по вертикальной планировке жилых районов г. Ясиноватая).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация является законченной научно-исследовательской работой, в которой получено новое решение класса инженерных задач на топографической поверхности, реализованных с помощью вычислительных алгоритмов и компьютерных средств и составляющих комплекс программ моделирования топографической поверхности, которые обеспечивают осуществление моделирования участка нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков, на регулярной и нерегулярной сети точек, а также моделирование горизонталей и линий вероятного водотока, расчёт площадей и объёмов топографической поверхности и её вертикальную планировку с соблюдением баланса земляных работ. Основные научные результаты и выводы, полученные при выполнении работы, состоят в следующем:

1. Выполненный анализ существующих способов создания ЦМР показал наличие как общих, так и частных недостатков, главным из которых является большой объём вычислений, необходимый для точной передачи незакономерной формы рельефа местности, а также необходимость преобразования нерегулярной сети точек в регулярную при использовании криволинейной интерполяции для создания ЦМР. Исходя из этого разработку новых инструментов ЦМР, полученных на основе точечных уравнений, которые могли бы охватить большее количество исходных точек, можно считать актуальной научно-практической задачей.

2. Исследованы способы моделирования дуг алгебраических кривых и отсеков поверхности 2-го и 3-го порядков, проходящих через наперед заданные точки, которые являются основой для создания вычислительных алгоритмов моделирования нерегулярной топографической поверхности, состоящей из регулярных отсеков, проходящих через наперёд заданные точки.

3. Предложен вычислительный алгоритм реконструкции отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперёд заданных точек, с помощью модифицированного уравнения дуги кривой Безье 3-го порядка. Предложенный способ определения топографической поверхности позволяет не

только минимизировать количество необходимых вычислений и более точно аппроксимировать криволинейную форму топографической поверхности, но и усовершенствовать существующий инструментарий современных геоинформационных систем в части моделирования цифрового рельефа местности.

4. Предложен способ расшифровки спутниковых снимков рельефа местности SRTM3, в основу которого положен вычислительный алгоритм аппроксимация поверхности рельефа местности регулярными 16-точечными отсеками поверхности. Такой подход кроме прочих преимуществ позволяет нивелировать влияние мелких артефактов в виде различного рода пятен при построении модели поверхности рельефа местности. Другим преимуществом предложенного метода является наличие итоговых уравнений регулярных 16-точечных отсеков, что позволяет использовать широкий инструментарий методов математического анализа для решения различного рода инженерных задач на итоговой поверхности рельефа местности.

5. Получены точечные и параметрические уравнения горизонталей отсека топографической поверхности и, на их основе, предложен вычислительный алгоритм формирования линий вероятных водотоков на топографической поверхности, что позволяет вычислять площадь водосбора и объем воды, а также определять направления разрушения грунта в результате водной эрозии. Вычисления можно проводить с любой наперед заданной плотностью горизонталей; причём увеличение количества горизонталей значительно повышает точность моделирования линий вероятного водотока.

6. Предложен способ расчёта площадей и объёмов отсека топографической поверхности, состоящей из 16-точечных отсеков, что позволяет решать инженерные задачи на топографической поверхности, и является теоретической основой для проведения вертикальной планировки на топографической поверхности, состоящей из регулярных 16-точечных отсеков.

7. Реализован вычислительный эксперимент по точности аппроксимации эталонной сферической поверхности предложенным способом моделирования

поверхности по сравнению с моделью TIN на регулярной и нерегулярной сети точек. В результате предложенный способ аппроксимации сферической поверхности 16-точечным отсеком показал более качественные результаты по отношению к модели TIN.

8. Предложен вычислительный алгоритм вертикальной планировки для проектирования горизонтальной площадки на топографической поверхности с сохранением баланса земляных работ на основе геометрического моделирования зависимости разностей объёмов выемки и насыпи от высотных отметок горизонтальных плоскостей уровня. При этом для предложенного вычислительного алгоритма моделирования установлена линейная зависимость между высотными отметками и разницей объёмов выемки и насыпи. Это позволяет не только минимизировать объём выполнения работ по транспортировке грунта при конструировании горизонтальной площадки на топографической поверхности, но и потерю редкоземельных металлов при их добыче выщелачиванием.

9. Внедрены результаты исследований в практику подготовки проектной документации (справка о внедрении № 51416 от 13.02.17 г. выдана отделом архитектуры и градостроительства администрации города Ясиноватая для составления проектной документации по вертикальной планировке жилых районов г. Ясиноватая), а также в учебный процесс ГОУ ВПО «ДОНБАССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ» (справка №4-04-1 от 13.01.17 г. принята к внедрению в учебный процесс при чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплине «Инженерная графика при кадастровых работах» и «Географические информационные системы» для подготовки бакалавров по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусин, О.Р. Цифровые модели для ГИС [Текст] / О.Р. Мусин // Информационный бюллетень ГИС Ассоциации.– 1998. - № 4(16)-5(17). – С.28-29.
2. Демиденко, А.Г. Повышение качества моделей рельефа местности, создаваемых по цифровым топографическим картам [Текст] / А.Г. Демиденко, А.И. Ястребов // Геопрофи. Технологии. – М.: ООО «Информационное агентство «ГРОМ», 2005. - № 3. - С. 15–18.
3. Мусихин, В.В. Создание цифровой модели местности с помощью данных радарной радиолокационной съемки [Текст] / В.В. Мусихин, Ю.С. Курков // Вестник ПНИПУ. Геология. Нефтегазовое и горное дело. - 2013. - №9. – С. 116–124.
4. Баранов, Ю.Б. Построение ЦМР по результатам интерферометрической обработки радиолокационных изображений Alos Palsar [Текст] / Ю.Б. Баранов [и др.] // Геопрофи. – 2008. – №1. – С. 31–34.
5. Построение цифровых моделей рельефа по результатам интерферометрической обработки радиолокационных изображений ALOS PALSAR 4.1 [Текст] / Ю.Б. Баранов, Ю.Б. Кантемиров, Е.В. Киселевский и др. // Геопрофи: №1 – М.: Изд-во Проспект, 2008. - С. 31-34.
6. Коротин, А.С. Восстановление трехмерных моделей рельефа местности на основе материалов дистанционного зондирования Земли [Текст] / А.С. Коротин, Е.В. Попов // Приволжский научный журнал. – 2013. - №2(30). – С. 29-34.
7. Коротин, А.С. Оценка точности цифровых моделей рельефа, применяемых для территориальных исследований [Текст] / А. С. Коротин, Е. В. Попов // Юбилейная 25-а Международная конференция (GraphiCon2015), РФ, Протвино (Парк Дракино), 22–25 сентября 2015 г., 2015. – С. 102-106.
8. Клименко, А.С. Виртуальное моделирование территории на основе данных дистанционного зондирования [Текст] / А.С. Клименко и др. // Известия

высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка. – ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет геодезии и картографии». - 2011. - №2. - С. 46-52.

9. Бугров, Н.В. Обзор алгоритмов триангуляции неявно заданной поверхности [Текст] / Н.В. Бугров и др. // Междунар. конф. MEDIAS2012, Республика Кипр, Лимассол, 7-14 мая 2012 г. Изд-во ИФТИ. - С. 151–173. – ISBN 978-5-88835-023-2.

10. Голубев, В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике [Текст]: учеб. пособ. / В.И. Голубев. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.

11. Дижевский, А.Ю. Визуализация трехмерных объектов и геометрические аспекты выявления особенностей: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / А.Ю. Дижевский. - Нижний Новгород, 2011. - 117 с.

12. Маруяску, Т. Разработка вопросов автоматизации при выборе маршрутов дорог [Текст] / Т. Маруяски и др. // Сэйсан кэйкю. - Город: изд-во, 1971. - № 4. - С. 127- 137.

13. Накамура, Х. Цифровая модель рельефа [Текст] / Х. Накамура, С. Мураи // Сэйсан кэйкю. - Город: изд-во, 1968. - № 8. - С. 410-415.

14. Нгуен Тхе Конг. Исследование и разработка высокопроизводительного алгоритма построения цифровых моделей рельефа: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.35 / Нгуен Тхе Конг. - Москва, 2011. - 101 с.

15. Флоринский, И.В. Международный опыт использования цифровых моделей рельефа при автоматизированном анализе данных дистанционного зондирования [Текст] / И.В. Флоринский // Геодезия и картография. - №12. – 1995. – С. 33-38.

16. Кочнева, А.А. Создание цифровых моделей рельефа для проектирования автодорог на основе технологии воздушного лазерного сканирования [Текст] / А.А. Кочнева, М.Г. Мустафин // Естественные и технические науки. – 2015. - №12(90). - С. 90 – 96.

17. Семенова, Е. Ю. Графические возможности модернизированного комплекса программ вертикальной планировки [Текст] / Е.Ю.Семенова,

О.Т.Иевлева, Л.В.Поляк // Тезисы докладов второй научно-технической конференций РАИ. – Ростов-на-Дону: РАИ, 1990. - С. 73.

18. Семенова, Е.Ю. Комплекс программ по моделированию рельефа территории [Текст] / Е.Ю.Семенова, О.Т.Иевлева // Программное обеспечение ЭВМ: индустриальная технология, интеллектуализация разработки и применения // Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара. - Ростов-на-Дону: НИИПС, 1988. - С. 86-87.

19. Костин, А.В. Цифровая модель рельефа (методы создания и направления использования) [Текст] / А.В. Костин // Современные технологии. Наука и техника в Якутии. - Якутия: изд-во и типография ФГБУН института мерзлотоведения им. П. И. Мельникова СО РАН, 2011. -№1(20). - С. 23-28.

20. Костин, А. В. Моделирование карты теневого рельефа Якутии средствами ГИС для прогнозирования потенциальных рудно-магматических систем [Текст] / А. В. Костин // Наука и образование. – 2010. – № 1. – С. 63–70.

21. Хромых, В.В. Цифровые модели рельефа: учебное пособие [Текст] / В.В. Хромых, О.В. Хромых. - Томск: ТМЛ – Пресс, 2007. - 178 с.

22. Демерс, М. Географические информационные системы. Основы [Текст] / М. Демерс. – М.: Дата+, 1999. – 504 с.

23. Видуев, Н.Г. Геодезическое проектирование вертикальной планировки [Текст] / Н.Г. Видуев, В.П. Гржибовский. – М.: Недра, 1964. - 252 с.

24. Галясовский, И.В. Некоторые геометрические вопросы теории топографических поверхностей при подсчете объемов земляных работ [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / И.В. Галясовский. – Киев: ДОКТ, 1963. - 16 с.

25. Дранишников, Ю.А. Теоретические основы и методы проектирования рельефа летных полей аэродромов с применением ЭЦВМ [Текст]: автореф. дис. ...канд. техн. наук: 25.00.35. / Ю.А. Дранишников. – Ленинград: [б.и.]. 1971. – 32 с.

26. Балюба, И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: дис. ... докт. техн. наук: 05.01.01 / И.Г. Балюба. – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.

27. Балюба, И.Г. Основная теорема точечной геометрии [Текст] / И.Г. Балюба // Материалы научно-практического семинара “Компьютерная графическая подготовка специалистов”. – Витебск: 1992. – С. 73-74.

28. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм [Текст] / И.Г. Балюба, В.И.Полищук, Б.Ф.Горягин и др. // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008г., г.Киев / Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова НАН Украины.- Киев: 2008. - Том 2. – С. 286-290.

29. Балюба, И.Г. Точечная геометрия и ее основная теорема [Текст] / И.Г. Балюба // Новые исследования в строительстве. – Макеевка: изд-во, 1993. – С. 84-87.

30. Балюба, И.Г. Символический язык геометрического моделирования / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. - 42с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 2367-Ук 94.

31. Балюба, И.Г. Теоретические основы точечного исчисления / И.Г. Балюба. – Макеевка., ДонНАСА, 1994. - 32с. Рукопись деп. в ГНТБ Украины, № 1919-Ук 94.

32. Балюба, И.Г. Геометрическая сущность кривых Безье и их аналитическое представление [Текст] / И.Г.Балюба // Зб. праць міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні проблеми геометричного моделювання». – Харків: ХІПБ МВС України, 1998. - Ч.1. - С.178-182.

33. Балюба, И.Г. Конструювання плоских і просторових алгебраїчних кривих системою лінійних точкових рівнянь [Текст] / І.Г.Балюба, Ж.В. Старченко, Є.В. Конопацький // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Вип. 4.

Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т.17. – Мелітополь: ТДАТА, 2002. - С. 66-67.

34. Балюба, І.Г. Основи математичного апарату точкового числення [Текст] / І. Г. Балюба, В. І. Поліщук, Т. П. Малютіна// Праці. Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. - 2005. – Т. 29. – С. 22-30.

35. Бумага, А. И. Геометрическое моделирование физико-механических свойств композиционных строительных материалов в БН-исчислении: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 и 05.01.01. / А.И. Бумага. - Макеевка, 2016. - 164 с.

36. Найдыш, В.М. Алгебра БН-исчисления [Текст] / В.М. Найдыш, И.Г. Балюба, В.М. Верещага // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. - Вип. 90. – 2012. – С. 210-215.

37. Балюба, И.Г. Точечное исчисление [Текст]: учеб. пособ. / И.Г. Балюба, В.М. Найдыш; под ред. В.М. Верещаги. – Мелітополь: МГПУ им. Б. Хмельницького, 2015. – 236 с.

38. Давыденко, И.П. Конструирование поверхностей пространственных форм методом подвижного симплекса: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / И.П. Давыденко. - Макеевка, 2012. - 186 с.

39. Конопацький, Є. В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01./ Є. В. Конопацький. – Мелітополь, 2012. – 164 с.

40. Крысько, А.А. Геометрическое и компьютерное моделирование эксплуатируемых конструкций тонкостенных оболочек инженерных сооружений с учётом несовершенств геометрической формы: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 и 05.01.01. / А.А. Крысько. – Макеевка, 2016. – 191 с.

41. Кучеренко, В.В. Формалізовані геометричні моделі нерегулярної поверхні для гіперкількісної дискретної скінченої множини точок: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / В.В. Кучеренко. – Мелітополь, 2013. – 234 с.

42. Малютина, Т.П. Определение вычислительных точечных алгоритмов раскроя листового металла для формирования трубчатых узлов решетчатых конструкций [Текст] / Т.П. Малютина, О.А. Чернышева, Г.Ю. Краснокутский // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. пр. – Мелітополь: МДПУ ім. Б.Хмельницького, 2014. – Вип. 1. – С. 78-83.

43. Найдиш, В.М. Дискретна інтерполяція [Текст]: Учебник для вузов / В.М. Найдиш. – Мелітополь.: ТДАТА 2008. – 250 с.

44. Балис, Б.С. Математическая картография [Текст]: Учебник для вузов / Балис Балио Серапинас. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 336 с.

45. Бугаевский, Л.М. Математическая картография [Текст]: Учебник для вузов / Л.М. Бугаевский. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 336 с.

46. Кожедуб, С.А. Методологічні визначення щодо методів графічного подання цифрових моделей рельєфу / С.А. Кожедуб // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Випуск 88.- К.: КНУБА, 2011. - С.165-172.

47. Цифровая модель рельефа. Пространственное моделирование и пространственная интерполяция. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://ajt.at.ua/index/cifrovaja_model_relefa_prostranstvennoe_modelirovanie_i_prostranstvennaja_interpoljacija/0-22

48. Лисицкий, Д.В. Основные принципы цифрового картографирования местности. [Текст] / Д.В. Лисицкий. – М.: Недра, 1988. – 261 с.

49. Осенняя, А.В. Технология оптимизации цифровой модели рельефа, полученной по данным воздушного лазерного сканирования / А.В. Осенняя, Е.В. Корчагина // Отраслевые научные и прикладные исследования: Информационные технологии. С. 85-86.

50. Геоинформатика [Текст]: Учеб. для студ. вузов / Е.Г. Капралов [и др.]; под ред. В.С. Тикунова. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 480 с.: цв. ил.

51. Ашкеназы, В.О. Сплайн - поверхности: Дополнительные главы [Текст]: Учебное пособие / В.О. Ашкеназы. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2001. – 36 с.

52. Ашкеназы, В.О. Погрешности интерполяции функции D^m – сплайнами [Текст] / В.О. Ашкеназы // Оптимальное управление динамическими системами: Сб. науч. трудов. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2001. – С. 34-40.

53. Ашкеназы В.О. Сплайн-поверхности и аппроксимационный поиск экстремума [Текст] / В.О. Ашкеназы // Ученые записки: Мат. научн. конф., посвященной 25-летию ун-та. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 1996. – Т. 1. – С.36-37.

54. Василенко, В.А. Сплайн - функции и цифровые фильтры [Текст] / В.А. Василенко, М.В. Зюзин, А.В. Ковалков. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. - 156 с.

55. Василенко, В.А. Сплайн - функции: теория, алгоритмы, программы [Текст] / В.А. Василенко. - Новосибирск: Наука, 1983. - 214 с.

56. Бежаев, А.Ю. Оценки ошибки сплайн-интерполяции в ограниченных областях [Текст] / А.Ю. Бежаев. - Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1984. - 19 с.

57. Смоляк, С.А. Сплайны и их применение [Текст] / С.А. Смоляк // Экономика и математические методы. - М., 1971. - Т.7. - вып.3. - С. 419-431.

58. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн функций [Текст] / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.П. Мирошниченко. - М.: Наука, 1980. - 352 с.

59. Ю. С. Волков, Ю. Н. Субботин, “50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн-интерполяции”, Тр. ИММ УрО РАН, 20, № 1, 2014, 52–67; Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 288, suppl. 1 (2015), 222–237.

60. Ал. А. Привалов, “О сходимости кубических интерполяционных сплайнов к непрерывной функции”, Матем. заметки, 25:5 (1979), 681–700; Math. Notes, 25:5 (1979), 349–359.

61. Зматраков, Н. Л. Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов. Приближение функций и операторов, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, 138, 1975, 71–93; Proc. Steklov Inst. Math., 138 (1977), 75–99.

62. Шадрин, А.Ю. О приближении функций интерполяционными сплайнами, заданными на неравномерных сетках [Текст] / А.Ю. Шадрин // Мат. сборник. - 1990. - Т. 181. - № 9. - С. 1236–1255.

63. Никулин, Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики [Текст]: учеб. Для вузов / Е.А. Никулин. – Санкт-Петербург.: «БХВ-Петербург», 2003. – 560 с.

64. Власов, В.С. Моделирование составных поверхностей с помощью B-сплайнов [Текст] / В.С. Власов // XXI век: Итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. – 2012. - №5(09). – С.169-175.

65. Самотонин, Д. Н. Сплайн-интерполяция высот рельефа местности при моделировании распространения радиоволн с использованием векторных геоданных [Текст] / Д.Н.Самотонин, С.И.Биденко // Информационно-управляющие системы. Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2004. - №3. – С. 22-30.

66. Замятин, А. В. Алгоритм аппроксимации поверхности сплайнами [Электронный ресурс] / А.В. Замятин, А.Е. Кубарев, Е.А. Замятина // Наукоедение. – 2012. - № 3. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/sbornik12/12-90.pdf> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

67. Замятин, А. В. Алгоритм сплайн-аппроксимации нелинейчатой поверхности [Электронный ресурс] / А.В. Замятин, А.Е. Кубарев, Е.А. Замятина// Наукоедение. – 2012. - №3. – Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/sbornik12/12-91.pdf> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.

68. Дышкант, Н.Ф. Эффективные алгоритмы сравнения поверхностей, заданных облаками точек: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. / Н.Ф. Дышкант. - Москва, 2011. – 139 с.

69. Карл де Бург. Практическое руководство по сплайнам [Текст] / Карл де Бург. - М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

70. Алберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения: Пер. с англ. [Текст] / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. - М.: Мир, 1972. – 350 с.

71. Бадаєв, Ю.І. Апроксимація сплайнами на основі кривих з інцидентними точками [Текст]: / Ю.І. Бадаєв, О.М. Ковтун // мат. міжнар. наук.-

практ. конф. Сучасні проблеми геометричного моделювання (спец-випуск). - Львів: Нац. ун-тет «Львівська політехніка», 2003. - С. 75–77.

72. Ковтун, А.М. Исследование способа построения кубического векторно-параметрического бисплайна с управляющими точками, инцидентными поверхности [Текст] / А.М. Ковтун // Машиноведение и машиностроение. Технологический аудит и резервы производства. - № 3/1(23). - 2015. - С. 69 – 72.

73. Квасов, Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами [Текст] / Б.И. Квасов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 360 с.

74. Иродова, И.П. Методы кусочно-полиномиальной аппроксимации в теории пространств Никольского-Бесова: дис....докт. физико-математических наук: 01.01.01/ И.П. Иродова. – Ярославль, 2011. – 265 с.

75. Джанунц, Г. А. Компьютерный метод кусочно-полиномиального приближения решений обыкновенных дифференциальных уравнений в применении к моделированию автоколебательных реакций: автореф. дис. ... канд. техн. наук. 05.13.18 / Г.А.Джанунц. - Таганрог, 2012. - 22 с.

76. Удумян, Д.К. Численные методы обработки данных, основанные на сингулярно-спектральном и метрическом анализах, и их применения [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. 05.13.18. / Д.К. Удумян. – Москва: Изд-во НИЯУ «МИФИ». 2011. - 28 с.

77. Лурье, И. К. Основы геоинформационного картографирования [Текст] / И.К. Лурье. - М.: Изд-во МГУ, 2000. - 143 с.

78. Скворцов, А.В. Триангуляция Делоне и её применение [Текст] / А.В. Скворцов. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. – 128 с.

79. Скворцов, А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне [Текст] / А.В. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. - Томск: Изд-во Томского ун-та, 2002. - Т.3. - С. 14-39.

80. Лурье, И.К. Теория и практика цифровой обработки изображений / И.К. Лурье, А.Г. Косиков // Дистанционное зондирование и географические информационные системы. – М.: Научный мир, 2003. - 186 с.

81. Шавук, В.С. Теоретическое обоснование цифровой фотограмметрической системы обработки космических снимков высокого разрешения [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 25.00.34. / В.С. Шавук. - Москва, 2008. – 115 с.

82. Инструкция по фотограмметрическим работам при создании цифровых карт и планов [Текст]: [ГКИНП (ГНТА)-02-036-02: введен 01.08.2002]. – М.: ЦНИИГАиК, 2002. – 100 с.

83. Агапов, С.В. Фотограмметрия сканерных снимков [Текст] / С.В. Агапов. – М.: «Картгеоцентр» - «Геодезиздат», 1996. – 178 с.

84. Блохинов, Ю.Б. Цифровая фотограмметрическая система Z_Space. Особенности и основные алгоритмы [Текст] / Ю.Б. Блохинов и др. // Труды междунар. научно-техн. конф., посвященной 220-летию со дня основания МИИГАиК. – М.: Изд-во МИИГАиК, 1999, - С.90-92.

85. Блохинов, Ю.Б., Разработка методов автоматизации фотограмметрических процессов на основе алгоритмов анализа и обработки изображений [Текст]: автореф. дис. ...докт. техн. наук: 25.00.34. / Ю. Б. Блохинов. - Москва: МИИГАиК, 2011. – 46 с.

86. Гук, А.П. Развитие фотограмметрических технологий на основе имманентных свойств цифровых снимков [Текст] / А.П. Гук // Геодезия и картография. – М.: ФГБУ «Центр геодезии, картографии и ИПД», 2007.- Т. 68.- №11. - С. 26-29.

87. Дегтярев, А.А. Метод конечных разностей [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / А.А. Дегтярев. – Самара: СГАУ, 2011. – 83 с. - (<https://rucont.ru/efd/230039>).

88. Скворцов, А.В. Эффективные алгоритмы построения триангуляции Делоне [Текст] / А.В. Скворцов, Ю.Л. Костюк // Геоинформатика: Теория и практика. Вып. 1. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. - С.22–47.

89. Скворцов, А.В. Применение триангуляции для решения задач вычислительной геометрии [Текст] / А.В. Скворцов, Ю.Л. Костюк //

Геоинформатика: Теория и практика. Вып. 1. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. - С.127–138.

90. Галанин, М.П. Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: итерационные методы [Текст] / М.П. Галанин, И.А. Щеглов. М.: 2006. - 32 с. (Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, №9).

91. Белкин, Е.А. Модульно-геометрический подход к моделированию процесса формирования микрорельефа поверхности [Текст]: дис. ... докт. тех. наук: 05.01.01 / Е.А. Белкин. - Нижний Новгород, 2012. - 380 с.

92. Мартиросов, А.Л. Аналитическое описание участков земных поверхностей, заданных набором горизонталей [Текст] / А.Л. Мартиросов // Интернет-журнал «Науковедение». - №3. - 2012. - С. 1-5. (<https://cyberleninka.ru/article/n/analiticheskoe-opisanie-uchastkov-zemnyh-poverhnostey-zadannyh-naborom-gorizontaley>).

93. Чернова, Л.И. Обработка геопространственной информации при цифровом моделировании топографических задач: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Л.И. Чернова. – Иркутск, 2006. – 123 с.

94. Семенова, Е.Ю. Методика моделирования проектной поверхности на основе компьютерной технологии [Текст]: автореф. дис. ... канд. тех. наук: 05.01.01. / Е.Ю. Семенова. - Нижний Новгород: АОЗТ «ЛКР», 1995. - 18 с.

95. Ким, В.Б. Сплайновый подход к моделированию рельефа [Текст] / В.Б. Ким, Е.В. Прокопенко // Вестник КемГУ. – Кемерово: Изд-во КемГУ, 2009. - №4. – С. 46-50.

96. Нестеренко, Е.А. Возможность использования сплайн – поверхности для построения поверхностей по результатам съемок [Текст] / Е.А.Нестеренко // Записки Горного института. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2013. - Т. 204. - С. 127 – 133.

97. Хейфец, В.С. Аппроксимирование топографической поверхности ортогональными многочленами Чебышева [Текст] / В.С. Хейфец // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – М.: Изд-во МИИГАиК, 1964. - Вып.2. - С. 78-86.

98. Ягодина, Л.Л. Моделирование поля рельефа с помощью ортогональных полиномов Чебышева [Текст] / Л.Л. Ягодина // Вестник Ленингр. госуд. ун-та, серия географическая. – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1972. – № 24. – С. 136-142.

99. Кузнецов, А.Е. Высокопроизводительные алгоритмы формирования цифровой модели рельефа на основе точечного описания [Текст] / А.Е.Кузнецов, В.И.Пошехонов // Информатика и прикладная математика: межвуз. сб. науч. тр. – Рязань: РИЦ РГУ, 2007. – С. 81-86.

100. Сутырина, Е.Н. Дистанционное зондирование земли [Текст]: учеб. пособие / Е.Н. Сутырина. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. – 165 с. ISBN 978-5-9624-0801-9.

101. Токарева, О.С. Обработка и интерпретация данных дистанционного зондирования Земли [Текст]: учеб. пособие / О.С. Токарева. – Томск : Изд-во Том. политех. ун-та, 2010. – 148 с.

102. Чандра, А.М. Дистанционное зондирование и географические информационные системы [Текст] / А.М. Чандра, С.К. Гош. – М.: Техносфера, 2008. – 312 с.

103. Геоинформатика [Текст]: Учеб. для студ. вузов / Е.Г. Капралов [и др.]; под ред. В.С. Тикунова. – М.: Изд. центр «Академия», 2005. – 480 с.

104. Основы геоинформатики [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов в 2 кн. Кн. 1 / Е.Г.Капралов [и др.]; под ред. В.С. Тикунова. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 352 с.

105. Бумага, А.І. Точкове рівняння дуги параболи другого порядку [Текст] / А.І. Бумага // Міжвідомчий науково-технічний збірник. Прикладна геометрія та інженерна графіка (спецвипуск). Вип.90. – К.: КНУБА, 2012. – С. 49-52.

106. Каешников, М.Б. Методика нанесения горизонталей на топографические карты по материалам воздушного лазерного сканирования [Текст] / М.Б. Каешников, А.А. Маслаков, Н.В. Герасимова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009. – №1. – С.28-33.

107. Инженерная подготовка и благоустройство городских территорий [Текст] / В.В. Владимиров и др. - М.: «Архитектура-С», 2004. - 240 с.

108. Леонтович, В.В. Вертикальная планировка городских территорий [Текст] / В.В. Леонтович. - М.: Высшая школа, 1985. – 119 с.

109. Конопацкий, Е.В. Теоретические основы решения задач с точками и прямыми в проекциях с числовыми отметками [Текст] / Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышева // Вісник Черкаського університету. Серія прикладна математика. Інформатика. Науковий журнал. – 2013. - №38(291). - С. 33-40.

110. Конопацкий, Е.В. Теоретические основы определения топографической поверхности графо-вычислительным методом [Текст] / Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышева // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. – Луцьк: ЛНТУ, 2015. – №19. – С.211-214.

111. Чернышева, О.А. Вычисление площадей на реконструированной топографической поверхности / О.А. Чернышева // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2017. - № 5. - С. 45-50.

112. Чернышева, О.А. Вычислительный алгоритм вертикальной планировки отсека топографической поверхности / О.А. Чернышева // Вестник компьютерных и информационных технологий. – М.: 2017. - № 10(160). - С. 13-19.

113. Конопацкий, Е.В. Моделирование криволинейного участка топографической поверхности на нерегулярной сети точек [Текст] / Е.В. Конопацкий, О.А. Чернышева, Я.А. Кокарева // Научно-технический и производственный журнал «Вестник компьютерных и информационных технологий». – М.: 2018. № 7. С. 17-22.

114. Ротанова, И.Н. Использование материалов дистанционного зондирования Земли для цифрового моделирования рельефа в составе региональных инфраструктур пространственных данных [Текст] / И.Н. Ротанова, А.В. Кошкарев, А. А. Медведев // Вычислительные технологии. Новосибирск: Издатель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 2014. - Т. 19, № 3. - С. 38–47.

115. Ерицяи, Г.Г. Сравнение цифровых моделей рельефа, полученных с топографических карт масштаба 1:50000, 1:100000 и 1:200000 с ЦМР SRTM [Текст] / Г.Г. Ерицяи // Известия НАИ РА, Науки о Земле, 2013. - 66, №1. - С.39-47.

116. Методика создания корректной цифровой модели рельефа на основе открытых источников геоданных (на примере месторождения Бурал-Сарьдаг) [Текст] / О. И. Демина, А.В. Паршин, А. М. Федоров и др. // Георесурсы. 2013. №3 (53). URL:<https://cyberleninka.ru/article/n/metodika-sozdaniya-korrektnoy-tsifrovoy-modeli-reliefa-na-osnove-otkrytyh-istochnikov-geodannyh-na-primere-mestorozhdeniya-bural-sardag> (дата обращения: 22.08.2018).

117. Чекалин, В.Ф. Оценка метрических свойств изображений космических систем наблюдения [Текст] / В. Ф. Чекалин, Г.В. Кузьмин, А.В. Шишанов // Геодезия и картография. – 2018. – Т. 79. – № 6. – С. 37-42. DOI: 10.22389/0016-7126-2018-936-6-37-42.

118. Данные SRTM Eurasia [Электронный ресурс] / Shuttle radar topographic mission. – Режим доступа: http://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/SRTM3/Eurasia. – 08.07.2018.

119. О данных SRTM и их импорте с помощью Arcinfo Workstation. Режим доступа: <http://gis-lab.info/qa/srtm.html>.

120. Замирец, О.О. Методика построения 3D модели триангуляционной нерегулярной сети на основе данных регулярной решетки высот [Текст] / О.О. Замирец, С.М. Андреев // Системи обробки інформації. – Харьков: 2013. - Вып. 5(112). - С.34-37.

121. Брылкии, Ю.В. Геометрическое моделирование микроструктуры поверхности на основе теории фракталов [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01. / Ю.В. Брылкии. - Нижний Новгород, 2017. - 121 с.

122. Чернышева, О.А. Аппроксимация топографической поверхности с помощью дуг кривых, проходящих через наперед заданные точки на основе

полиномов Бернштейна [Текст] / О.А. Чернышева // V международная конференция и школа-семинар для молодых ученых «Ситуационные центры и информационно-аналитические системы для задач мониторинга и безопасности – SC-IoT-VRTerro2016»: SCVRT1516. Труды межд. науч. конф. (Царь Град, 21–24 ноября 2016 г.). – Царь Град: МФТИ ИФТИ Протвино, 2016. – С. 134-138.

123. Кузнецов, М.С. Эрозия и охрана почв [Текст]: Учеб. / М.С. Кузнецов, Г.П. Глазунов. - М.: Изд-во МГУ, 1996. – 335 с.

124. Караев, А.И. Повышение точности метода построения линий уровня на поверхности земельных участков сельскохозяйственного назначения / А.И. Караев, В.В. Кузьминов // Системні технології: Регіон. міжвуз. зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2006. - Вип.2 (43). – С.100-106.

125. Караев, О.Г. Алгоритм побудови ліній рівня на ділянках ґрунтів земель сільськогосподарського призначення / О.Г. Караєв, В.В. Кузьмінов // Прикл. геом. та інж. граф. Праці ТДАТА – Вип. 4, т. 28. – Мелітополь: ТДАТА, 2004. – С. 37-46.

126. Чернышева, О.А. Построение линий вероятного водотока на топографической поверхности в БН-исчислении [Текст] / О.А. Чернышева, Е.В. Конопацкий // Материалы VII Международная научно-практическая Интернет-конференция КГП-2017 «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации». – Пермь: ПНИПУ, 2017. – Вып. 4. - С.109-116.

127. Виноградов, А.В. Методология определения площадей территорий на поверхностях эллипсоидов с изменяемыми параметрами [Текст]: дис. ... докт. техн. наук: 25.00.32 / А.В. Виноградов. – Омск, 2014. – 243 с.

128. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. В 2 т. [Текст] / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. - Т. 2. - 560 с.

129. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для вузов. В 2 т. [Текст] / Н.С. Пискунов. - М.: Наука, 1985. - Т. 1. - 432 с.

130. ЕНиР. Сборник Е2.Земляные работы. Вып. 1Механизированные и ручные земляные работы / Госстрой СССР. – М.: Стройиздат, 1989. – 224 с.

131. Atteia, M. Existence et determination des fonctions "spline" á plusieurs variables [Текст] / M. Atteia // C.R. Acad. Sc. Paris. - 1966. - Т. 262. - Serie A. - P. 575-578.

132. Harder, R.L. Interpolation using surface splines [Текст] / R.L. Harder, R.N. Desmarais // Journal of Aircraft. - 1972. - Vol.9. - №2. - P. 189-191.

133. Jonathan de Ferranti B. Digital elevation of North Eurasia: Viewfinderpanoramas [Текст] / B. Jonathan de Ferranti // Last upload. - Город: изд-во, 21 August 2009.

134. Lee D. Two algorithms for constructing a Delaunay triangulation [Текст] / D. Lee, B. Schachter // Int. Jour. Comp. and Inf. Sciences.- 1980. - Vol.9. - № 3. - P. 219–242.

135. Tamal K. Dey. Curve and Surface Reconstruction: Algorithms with Mathematical Analysis [Текст] / Tamal K. Dey // Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. - NY, USA: Cambridge University Press New York, 2006. – P. 230.

136. Farin, G. Curves and surfaces for computer aided geometric design, 3rd edn. [Текст] / G. Farin. - San Diego: Academic Press, 1992. – С. 277-280.

137. The shuttle radar topography mission. / Farr Tom G., Hensley Scott, Rodriguez Ernesto, Martin Jan, Kobrick Mike. // CEOS SAR Workshop. Toulouse 26-29 Oct. 1999. Noordwijk. 2000, p. 361-363.

Приложение А

Копии документов о внедрении результатов исследований



**Министерство образования и науки
Донецкой Народной Республики**
**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры»**

86123, г. Макеевка, ул. Державина, 2, тел.: (062) 340-15-80,
(0623) 22-24-67, факс (0623) 22-77-19, email: mailbox@donnasa.ru, идент. код 02070795

от 13.01.17 № 4-04-1

на № _____ от _____

СПРАВКА

о внедрении результатов исследований диссертационной работы Чернышевой О.А. на тему: «Вычислительные алгоритмы моделирования нерегулярной поверхности применительно к задачам математической картографии», представленную на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.01.01 – Инженерная геометрия и компьютерная графика

Графо-вычислительная методика определения геометрических объектов в проекциях с числовыми отметками, предложенная в кандидатской диссертационной работе ассистентом кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» Чернышевой О.А., принята к внедрению в учебный процесс при чтении лекций и проведении практических занятий по дисциплине «Инженерная графика при кадастровых работах» для подготовки бакалавров по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры».

Также в учебный процесс ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры» внедрён способ моделирования отсека топографической поверхности для построения цифровых моделей местности по дисциплине «Географические информационные системы» для подготовки бакалавров по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

Проректор по учебной работе
ГОУ ВПО «Донбасская национальная
академия строительства и архитектуры»
д.т.н., профессор



Н.М. Зайченко

Начальник учебной части
к.гос.упр., доцент

А.А. Сухина

Заведующий кафедрой
«Специализированные информационные
технологии и системы», к.т.н., доцент

Я.В. Назим



АДМИНИСТРАЦИЯ ГОРОДА
ЯСИНОВАТАЯ
**ОТДЕЛ АРХИТЕКТУРЫ И
ГРАДОСТРОИТЕЛЬСТВА**
86000, ул. Орджоникидзе, 147, г.Ясиноватая
Донецкая Народная Республика
e-mail: orgotdel306@mail.ru



13.02.17 № 5/476

СПРАВКА

О внедрении результатов научно-исследовательской работы ассистента кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры Чернышевой О.А.

Справка дана ассистенту кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» Донбасской национальной академии строительства и архитектуры – Чернышевой Оксане Александровне о том, что разработанный в её диссертационной работе вычислительный алгоритм подсчёта объёмов земляных работ отсека топографической поверхности, проходящей через 16 наперёд заданных точек, принят к внедрению в отдел Архитектуры и градостроительства Администрации города Ясиноватая для составления проектной документации по вертикальной планировке жилых районов г. Ясиноватая.

Начальник отдела
архитектуры и градостроительства



В.В. Кистов

Приложение Б

Листинг программы для создания ЦМР на регулярной сети точек в программном пакете Maple

```

restart;
with(plots);
st := time();
x := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls", "Лист4",
"B27:AL27");
y := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls", "Лист4",
"A2:A26");
z := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls", "Лист4",
"B2:AL26");
m := 25; n := 37;
t1 := 1-t;
tau1 := 1-tau;
k := 0;
for j by 3 to n-3 do k := k+1; l := 0; xm1[k] := (x[1, j]*(t1^3-2.5*t1^2*t+t1*t^2)+x[1,
j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+x[1, j+2]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+x[1, j+3]*(t1^2*t-
2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^3-2.5*tau1^2*tau+tau1*tau^2)+(x[1, j]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+x[1, j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+x[1, j+2]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+x[1, j+3]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1^2*tau-
4.5*tau1*tau^2)+(x[1, j]*(t1^3-2.5*t1^2*t+t1*t^2)+x[1, j+1]*(9*t1^2*t-
4.5*t1*t^2)+x[1, j+2]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+x[1, j+3]*(t1^2*t-
2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1*tau^2-4.5*tau1^2*tau)+(x[1, j]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+x[1, j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+x[1, j+2]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+x[1, j+3]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^2*tau-
2.5*tau1*tau^2+tau^3); for i by 3 to m-3 do l := l+1; ym1[l] := (y[i, 1]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+y[i, 1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+y[i, 1]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+y[i,
1]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^3-2.5*tau1^2*tau+tau1*tau^2)+(y[i+1, 1]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+y[i+1, 1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+y[i+1, 1]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+y[i+1, 1]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1^2*tau-
4.5*tau1*tau^2)+(y[i+2, 1]*(t1^3-2.5*t1^2*t+t1*t^2)+y[i+2, 1]*(9*t1^2*t-
4.5*t1*t^2)+y[i+2, 1]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+y[i+2, 1]*(t1^2*t-
2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1*tau^2-4.5*tau1^2*tau)+(y[i+3, 1]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+y[i+3, 1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+y[i+3, 1]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+y[i+3, 1]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^2*tau-
2.5*tau1*tau^2+tau^3); zm1[l, k] := (z[i, j]*(t1^3-2.5*t1^2*t+t1*t^2)+z[i,
j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+z[i, j+2]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+z[i, j+3]*(t1^2*t-
2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^3-2.5*tau1^2*tau+tau1*tau^2)+(z[i+1, j]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+z[i+1, j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+z[i+1, j+2]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+z[i+1, j+3]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1^2*tau-

```

```

4.5*tau1*tau^2)+(z[i+2, j]*(t1^3-2.5*t1^2*t+t1*t^2)+z[i+2, j+1]*(9*t1^2*t-
4.5*t1*t^2)+z[i+2, j+2]*(-4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+z[i+2, j+3]*(t1^2*t-
2.5*t1*t^2+t^3))*(9*tau1*tau^2-4.5*tau1^2*tau)+(z[i+3, j]*(t1^3-
2.5*t1^2*t+t1*t^2)+z[i+3, j+1]*(9*t1^2*t-4.5*t1*t^2)+z[i+3, j+2]*(-
4.5*t1^2*t+9*t1*t^2)+z[i+3, j+3]*(t1^2*t-2.5*t1*t^2+t^3))*(tau1^2*tau-
2.5*tau1*tau^2+tau^3) end do end do;
a := l; b := k;
p := 15; q := 10;
r := 0;
for k to b do for l to a do r := r+1; g[r] := plot3d([xm1[k], ym1[l], zm1[l, k]], t = 0 .. 1,
tau = 0 .. 1, grid = [p, q]); h[r] := contourplot3d([xm1[k], ym1[l], zm1[l, k]], t = 0 .. 1,
tau = 0 .. 1, grid = [p, q], contours = 7, color = black, thickness = 2) end do end do;
s := seq(g[r], r = 1 .. a*b);
s1 := seq(h[r], r = 1 .. a*b);
x11 := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls",
"Лист1", "A2:A926");
x1 := convert(x11, Vector);
y11 := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls",
"Лист1", "B2:B926");
y1 := convert(y11, Vector);
z11 := ExcelTools:-Import("D:\\ Площадка регулярная сеть\\Площадка 1.xls",
"Лист1", "C2:C926");
z1 := convert(z11, Vector);
s2 := pointplot3d(x1, y1, z1, symbolsize = 4, color = black);
interface(plotdevice = window);
display3d([s], axes = normal);
time()-st;

```

Приложение В

Листинг программы для создания ЦМР на нерегулярной сети точек в программном пакете Maple

```

restart:
with(plots):

m:=190;

A:=`c:\data2.txt`;
Ax:=readdata(A,3);

xA:=array(1..m); yA:=array(1..m); zA:=array(1..m); xN1:=array(1..18);
yN1:=array(1..18); zN1:=array(1..18); xN2:=array(1..18); yN2:=array(1..18);
zN2:=array(1..18); xN3:=array(1..18); yN3:=array(1..18); zN3:=array(1..18);
xN4:=array(1..18); yN4:=array(1..18); zN4:=array(1..18); xM:=array(1..18);
yM:=array(1..18); zM:=array(1..18); Dx_u:=array(1..18); Dx_v:=array(1..18);
Dy_u:=array(1..18); Dy_v:=array(1..18); Jacobian:=array(1..18);

for i from 1 to m do
for j from 1 to 3 do
xA[i]:=Ax[i,1]; yA[i]:=Ax[i,2]; zA[i]:=Ax[i,3];
end do end do;
evalm(xA); evalm(yA); evalm(zA);

xN1[1]:=xA[1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA[3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[4]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
yN1[1]:=yA[1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA[3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[4]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
zN1[1]:=zA[1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA[3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[4]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
xN2[1]:=xA[5]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[6]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA[7]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[8]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
yN2[1]:=yA[5]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[6]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA[7]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[8]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
zN2[1]:=zA[5]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[6]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA[7]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[8]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
xN3[1]:=xA[9]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[10]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA[11]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[12]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);

```

$$yN3[1]:=yA[9]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[10]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[11]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[12]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[1]:=zA[9]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[10]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[11]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[12]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[1]:=xA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[1]:=yA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[1]:=zA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[1]:=xN1[1]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[1]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[1]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[1]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[1]:=yN1[1]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[1]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[1]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[1]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[1]:=zN1[1]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[1]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[1]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[1]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[2]:=xA[4]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[17]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[18]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[19]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[2]:=yA[4]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[17]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[18]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[19]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[2]:=zA[4]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[17]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[18]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[19]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[2]:=xA[8]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[20]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[21]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[22]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[2]:=yA[8]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[20]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[21]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[22]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[2]:=zA[8]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[20]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[21]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[22]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[2]:=xA[12]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[23]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[24]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[25]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[2]:=yA[12]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[23]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[24]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[25]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[2]:=zA[12]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[23]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[24]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[25]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[2]:=xA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[26]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[27]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[28]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[2]:=yA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[26]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[27]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[28]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[2]:=zA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[26]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[27]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[28]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[2]:=xN1[2]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[2]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[2]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[2]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[2]:=yN1[2]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[2]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[2]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[2]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[2]:=zN1[2]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[2]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[2]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[2]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[3]:=xA[19]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[29]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[30]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[31]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[3]:=yA[19]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[29]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[30]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[31]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[3]:=zA[19]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[29]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[30]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[31]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[3]:=xA[22]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[32]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[33]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[34]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[3]:=yA[22]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[32]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[33]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[34]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[3]:=zA[22]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[32]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[33]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[34]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[3]:=xA[25]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[35]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[36]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[37]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[3]:=yA[25]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[35]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[36]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[37]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[3]:=zA[25]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[35]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[36]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[37]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[3]:=xA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[3]:=yA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[3]:=zA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[3]:=xN1[3]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[3]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[3]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[3]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[3]:=yN1[3]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[3]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[3]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[3]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[3]:=zN1[3]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[3]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[3]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[3]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[4]:=xA[31]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[45]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[46]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[47]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[4]:=yA[31]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[45]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[46]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[47]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[4]:=zA[31]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[45]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[46]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[47]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[4]:=xA[34]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[48]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[49]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[50]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[4]:=yA[34]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[48]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[49]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[50]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[4]:=zA[34]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[48]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[49]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[50]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[4]:=xA[37]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[51]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[52]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[53]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[4]:=yA[37]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[51]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[52]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[53]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[4]:=zA[37]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[51]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[52]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[53]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[4]:=xA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[4]:=yA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[4]:=zA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[4]:=xN1[4]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[4]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[4]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[4]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[4]:=yN1[4]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[4]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[4]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[4]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[4]:=zN1[4]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[4]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[4]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[4]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[5]:=xA[47]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[57]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[58]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[59]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[5]:=yA[47]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[57]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[58]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[59]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[5]:=zA[47]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[57]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[58]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[59]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[5]:=xA[50]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[60]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[61]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[62]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[5]:=yA[50]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[60]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[61]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[62]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[5]:=zA[50]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[60]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[61]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[62]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[5]:=xA[53]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[63]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[64]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[65]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[5]:=yA[53]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[63]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[64]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[65]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[5]:=zA[53]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[63]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[64]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[65]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[5]:=xA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[5]:=yA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[5]:=zA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[5]:=xN1[5]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[5]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[5]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[5]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[5]:=yN1[5]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[5]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[5]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[5]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[5]:=zN1[5]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[5]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[5]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[5]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[6]:=xA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[6]:=yA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$zN1[6]:=zA[66]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[67]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[68]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[69]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN2[6]:=xA[70]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[71]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[72]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[73]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN2[6]:=yA[70]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[71]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[72]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[73]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN2[6]:=zA[70]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[71]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[72]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[73]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN3[6]:=xA[74]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[75]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[76]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[77]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN3[6]:=yA[74]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[75]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[76]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[77]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN3[6]:=zA[74]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[75]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[76]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[77]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN4[6]:=xA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN4[6]:=yA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN4[6]:=zA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xM[6]:=xN1[6]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[6]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[6]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[6]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$
 $yM[6]:=yN1[6]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[6]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[6]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[6]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$
 $zM[6]:=zN1[6]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[6]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[6]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[6]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$

 $xN1[7]:=xA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$$yN1[7]:=yA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[7]:=zA[40]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[78]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[79]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[66]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[7]:=xA[80]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[81]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[82]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[70]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[7]:=yA[80]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[81]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[82]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[70]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[7]:=zA[80]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[81]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[82]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[70]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[7]:=xA[83]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[84]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[85]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[74]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[7]:=yA[83]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[84]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[85]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[74]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[7]:=zA[83]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[84]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[85]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[74]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[7]:=xA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[7]:=yA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[7]:=zA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[7]:=xN1[7]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[7]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[7]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[7]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[7]:=yN1[7]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[7]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[7]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[7]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[7]:=zN1[7]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[7]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[7]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[7]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[8]:=xA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[8]:=yA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[8]:=zA[28]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[38]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[39]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[40]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[8]:=xA[27]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[86]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[87]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[80]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[8]:=yA[27]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[86]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[87]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[80]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[8]:=zA[27]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[86]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[87]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[80]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[8]:=xA[26]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[88]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[89]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[83]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[8]:=yA[26]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[88]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[89]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[83]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[8]:=zA[26]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[88]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[89]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[83]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[8]:=xA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[8]:=yA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[8]:=zA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[8]:=xN1[8]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[8]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[8]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[8]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[8]:=yN1[8]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[8]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[8]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[8]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[8]:=zN1[8]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[8]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[8]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[8]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$xN1[9]:=xA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN1[9]:=yA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN1[9]:=zA[13]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[14]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[15]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[16]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN2[9]:=xA[93]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[94]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[95]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[96]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN2[9]:=yA[93]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[94]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[95]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[96]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN2[9]:=zA[93]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[94]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[95]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[96]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN3[9]:=xA[97]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[98]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[99]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[100]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN3[9]:=yA[97]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[98]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[99]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[100]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN3[9]:=zA[97]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[98]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[99]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[100]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xN4[9]:=xA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $yN4[9]:=yA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $zN4[9]:=zA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$
 $xM[9]:=xN1[9]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[9]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[9]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[9]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$
 $yM[9]:=yN1[9]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[9]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[9]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[9]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$

$$zM[9]:=zN1[9]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[9]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[9]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[9]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[10]:=xA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[10]:=yA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[10]:=zA[16]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[90]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[91]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[92]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[10]:=xA[96]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[105]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[106]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[41]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[10]:=yA[96]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[105]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[106]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[41]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[10]:=zA[96]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[105]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[106]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[41]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[10]:=xA[100]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[107]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[108]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[109]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[10]:=yA[100]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[107]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[108]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[109]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[10]:=zA[100]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[107]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[108]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[109]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[10]:=xA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[10]:=yA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[10]:=zA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[10]:=xN1[10]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[10]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[10]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[10]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[10]:=yN1[10]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[10]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[10]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[10]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[10]:=zN1[10]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[10]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[10]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[10]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[11]:=xA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[11]:=yA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[11]:=zA[92]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[113]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[114]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[115]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[11]:=xA[41]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[42]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[43]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[44]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[11]:=yA[41]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[42]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[43]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[44]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[11]:=zA[41]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[42]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[43]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[44]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[11]:=xA[109]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[116]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[117]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[118]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[11]:=yA[109]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[116]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[117]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[118]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[11]:=zA[109]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[116]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[117]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[118]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[11]:=xA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[11]:=yA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[11]:=zA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[11]:=xN1[11]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[11]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[11]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[11]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[11]:=yN1[11]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[11]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[11]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[11]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[11]:=zN1[11]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[11]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[11]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[11]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[12]:=xA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[12]:=yA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[12]:=zA[115]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[122]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[123]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[124]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[12]:=xA[44]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[54]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[55]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[56]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[12]:=yA[44]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[54]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[55]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[56]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[12]:=zA[44]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[54]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[55]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[56]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[12]:=xA[118]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[125]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[126]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[127]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[12]:=yA[118]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[125]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[126]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[127]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[12]:=zA[118]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[125]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[126]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[127]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[12]:=xA[121]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[128]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[129]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[12]:=yA[121]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[128]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[129]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[12]:=zA[121]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[128]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[129]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[12]:=xN1[12]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[12]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[12]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[12]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[12]:=yN1[12]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[12]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[12]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[12]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[12]:=zN1[12]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[12]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[12]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[12]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[13]:=xA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[13]:=yA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[13]:=zA[112]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[119]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[120]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[121]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[13]:=xA[131]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[132]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[133]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[128]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[13]:=yA[131]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[132]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[133]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[128]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[13]:=zA[131]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[132]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[133]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[128]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[13]:=xA[134]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[135]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[136]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[129]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[13]:=yA[134]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[135]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[136]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[129]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[13]:=zA[134]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[135]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[136]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[129]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[13]:=xA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[13]:=yA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[13]:=zA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[13]:=xN1[13]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[13]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[13]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[13]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[13]:=yN1[13]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[13]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[13]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[13]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[13]:=zN1[13]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[13]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[13]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[13]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[14]:=xA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[14]:=yA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[14]:=zA[104]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[110]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[111]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[112]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[14]:=xA[140]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[141]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[142]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[131]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[14]:=yA[140]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[141]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[142]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[131]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[14]:=zA[140]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[141]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[142]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[131]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[14]:=xA[143]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[144]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[145]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[134]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[14]:=yA[143]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[144]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[145]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[134]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[14]:=zA[143]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[144]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[145]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[134]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[14]:=xA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[14]:=yA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[14]:=zA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[14]:=xN1[14]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[14]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[14]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[14]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[14]:=yN1[14]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[14]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[14]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[14]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[14]:=zN1[14]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[14]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[14]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[14]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[15]:=xA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[15]:=yA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[15]:=zA[101]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[102]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[103]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[104]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[15]:=xA[149]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[150]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[151]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[140]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[15]:=yA[149]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[150]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[151]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[140]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[15]:=zA[149]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[150]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[151]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[140]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[15]:=xA[152]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[153]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[154]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[143]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[15]:=yA[152]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[153]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[154]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[143]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[15]:=zA[152]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[153]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[154]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[143]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[15]:=xA[155]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[156]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[157]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[146]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[15]:=yA[155]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[156]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[157]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[146]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[15]:=zA[155]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[156]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[157]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[146]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[15]:=xN1[15]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[15]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[15]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[15]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[15]:=yN1[15]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[15]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[15]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[15]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[15]:=zN1[15]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[15]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[15]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[15]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[16]:=xA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[16]:=yA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[16]:=zA[146]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[147]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[148]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[137]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[16]:=xA[158]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[159]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[160]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[161]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[16]:=yA[158]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[159]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[160]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[161]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[16]:=zA[158]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[159]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[160]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[161]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[16]:=xA[162]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[163]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[164]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[165]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[16]:=yA[162]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[163]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[164]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[165]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[16]:=zA[162]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[163]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[164]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[165]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[16]:=xA[166]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[167]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[168]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[169]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[16]:=yA[166]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[167]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[167]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[169]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[16]:=zA[166]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[167]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[167]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[169]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[16]:=xN1[16]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[16]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[16]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[16]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[16]:=yN1[16]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[16]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[16]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[16]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[16]:=zN1[16]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[16]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[16]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[16]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[17]:=xA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[170]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[171]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[172]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[17]:=yA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[170]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[171]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[172]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[17]:=zA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[170]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[171]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[172]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[17]:=xA[161]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[173]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[174]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[175]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[17]:=yA[161]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[173]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[174]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[175]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN2[17]:=zA[161]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[173]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[174]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[175]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN3[17]:=xA[165]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[176]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[177]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[178]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN3[17]:=yA[165]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[176]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[177]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[178]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN3[17]:=zA[165]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[176]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[177]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[178]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN4[17]:=xA[169]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[179]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[180]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[181]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN4[17]:=yA[169]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[179]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[180]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[181]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN4[17]:=zA[169]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[179]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[180]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[181]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xM[17]:=xN1[17]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[17]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[17]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[17]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$yM[17]:=yN1[17]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[17]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[17]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[17]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$zM[17]:=zN1[17]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[17]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[17]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[17]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$$

$$xN1[18]:=xA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN1[18]:=yA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$zN1[18]:=zA[137]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[138]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[139]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[130]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$xN2[18]:=xA[170]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[182]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[183]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[184]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$$yN2[18]:=yA[170]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[182]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[183]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[184]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$$

$zN2[18]:=zA[170]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[182]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[183]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[184]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$xN3[18]:=xA[171]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[185]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[186]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[187]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$yN3[18]:=yA[171]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[185]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[186]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[187]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$zN3[18]:=zA[171]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[185]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[186]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[187]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$xN4[18]:=xA[172]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[188]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[189]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[190]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$yN4[18]:=yA[172]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[188]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[189]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[190]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$zN4[18]:=zA[172]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[188]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[189]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[190]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);$

$xM[18]:=xN1[18]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2[18]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+xN3[18]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4[18]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$

$yM[18]:=yN1[18]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2[18]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+yN3[18]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4[18]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$

$zM[18]:=zN1[18]*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2[18]*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+zN3[18]*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4[18]*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);$

$s1:=\text{plot3d}([xM[1],yM[1],zM[1]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s2:=\text{plot3d}([xM[2],yM[2],zM[2]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s3:=\text{plot3d}([xM[3],yM[3],zM[3]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s4:=\text{plot3d}([xM[4],yM[4],zM[4]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s5:=\text{plot3d}([xM[5],yM[5],zM[5]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s6:=\text{plot3d}([xM[6],yM[6],zM[6]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s7:=\text{plot3d}([xM[7],yM[7],zM[7]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s8:=\text{plot3d}([xM[8],yM[8],zM[8]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s9:=\text{plot3d}([xM[9],yM[9],zM[9]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s10:=\text{plot3d}([xM[10],yM[10],zM[10]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s11:=\text{plot3d}([xM[11],yM[11],zM[11]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s12:=\text{plot3d}([xM[12],yM[12],zM[12]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s13:=\text{plot3d}([xM[13],yM[13],zM[13]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$

$s14:=\text{plot3d}([xM[14],yM[14],zM[14]],u=0..1,v=0..1, \text{style}=\text{PATCHCONTOUR});$


```
s15:=plot3d([xM[15],yM[15],zM[15]],u=0..1,v=0..1, style=PATCHCONTOUR):  
s16:=plot3d([xM[16],yM[16],zM[16]],u=0..1,v=0..1, style=PATCHCONTOUR):  
s17:=plot3d([xM[17],yM[17],zM[17]],u=0..1,v=0..1, style=PATCHCONTOUR):  
s18:=plot3d([xM[18],yM[18],zM[18]],u=0..1,v=0..1, style=PATCHCONTOUR):
```

```
x1 := convert(xA, Vector);  
y1 := convert(yA, Vector);  
z1 := convert(zA, Vector);  
s19 := pointplot3d(x1, y1, z1, symbolsize = 4, color = black);
```

```
interface(plotdevice = window):  
display3d([s1,s2,s3,s4,s5,s6,s7,s8,s9,s10,s11,s12,s13,s14,s15,s16,s17,s18,s19], axes =  
normal);
```

Приложение Г

Листинг программы для проведения вычислительного эксперимента по точности аппроксимации сферической поверхности 16-точечными отсеками

```

restart:
with(plots):
R:=1;
#Параметрические уравнения сферы
x:=R*sin(u)*cos(v);
y:=R*sin(u)*sin(v);
z:=R*cos(u);
#Определение площади сферы через поверхностный интеграл
E:=(diff(x,u))^2+(diff(y,u))^2+(diff(z,u))^2;
G:=(diff(x,v))^2+(diff(y,v))^2+(diff(z,v))^2;
F:=(diff(x,u))*(diff(x,v))+diff(y,u)*diff(y,v)+diff(z,u)*diff(z,v);
FF:=simplify((E*G-F^2)^0.5);
S:=evalf(int(int(FF,u=0..Pi/2),v=0..Pi/2));
#S1:=simplify(Int(Int(FF,u=u1..u2),v=v1..v2));
#Определение координат точек на поверхности сферы
m:=3; n:=3;
xA:=array(0..m,0..n); yA:=array(0..m,0..n); zA:=array(0..m,0..n);
for i from 0 to m do
for j from 0 to n do
xA[i,j]:=R*sin(i*Pi/(2*m))*cos(j*Pi/(2*n));
yA[i,j]:=R*sin(i*Pi/(2*m))*sin(j*Pi/(2*n));
zA[i,j]:=R*cos(i*Pi/(2*m));
end do end do;
#Определение 16-точечного отсека
xN1:=xA[0,0]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[1,0]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[2,0]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[3,0]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
yN1:=yA[0,0]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[1,0]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[2,0]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[3,0]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
zN1:=zA[0,0]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[1,0]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+zA[2,0]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[3,0]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
xN2:=xA[0,1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[1,1]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+xA[2,1]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[3,1]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
yN2:=yA[0,1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[1,1]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-u)*u^2)+yA[2,1]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[3,1]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);

```

```

zN2:=zA[0,1]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[1,1]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA[2,1]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[3,1]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
xN3:=xA[0,2]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[1,2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA[2,2]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[3,2]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
yN3:=yA[0,2]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[1,2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA[2,2]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[3,2]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
zN3:=zA[0,2]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[1,2]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA[2,2]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[3,2]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
xN4:=xA[0,3]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA[1,3]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA[2,3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA[3,3]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
yN4:=yA[0,3]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA[1,3]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA[2,3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA[3,3]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
zN4:=zA[0,3]*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA[1,3]*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA[2,3]*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA[3,3]*(u*(1-u)^2-2.5*(1-
u)*u^2+u^3);
xM:=simplify(xN1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+xN2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-
v)*v^2)+xN3*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+xN4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3));
yM:=simplify(yN1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+yN2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-
v)*v^2)+yN3*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+yN4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3));
zM:=simplify(zN1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+zN2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-
v)*v^2)+zN3*(-4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+zN4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3));
#Вычисление площади 16-точечного отсека сферической поверхности через
поверхностный интеграл
E2:=(diff(xM,u))^2+(diff(yM,u))^2+(diff(zM,u))^2;
G2:=(diff(xM,v))^2+(diff(yM,v))^2+(diff(zM,v))^2;
F2:=(diff(xM,u))*(diff(xM,v))+diff(yM,u)*diff(yM,v)+diff(zM,u)*diff(zM,v));
FF2:=(E2*G2-F2^2)^0.5;
S2:=evalf(Int(Int(FF2,u=0..1),v=0..1));
evalf(abs(100*(S-S2)/S));
p1:=plot3d([xM,yM,zM],u=0..1,v=0..1, style=PATCHCONTOUR,
labels=["x","y","z"]);
p2:=plot3d([x,y,z],u=0..Pi/2,v=0..Pi/2, color = green);
x1 := convert(xA, Vector);
y1 := convert(yA, Vector);
z1 := convert(zA, Vector);
p3 := pointplot3d(x1, y1, z1, symbolsize = 15, color = black);
display3d([p1,p2,p3], axes = normal);
#Определяем площадь отсека сферической поверхности на основе
триангуляционной сети

```

```

evalm(x1); evalm(y1); evalm(z1);
SS1:=0; SS2:=0;
for i from 1 to 11 do
l1[i]:=((x1[i]-x1[i+1])^2+(y1[i]-y1[i+1])^2+(z1[i]-z1[i+1])^2)^0.5:
l2[i]:=((x1[i]-x1[i+5])^2+(y1[i]-y1[i+5])^2+(z1[i]-z1[i+5])^2)^0.5:
l3[i]:=((x1[i+1]-x1[i+5])^2+(y1[i+1]-y1[i+5])^2+(z1[i+1]-z1[i+5])^2)^0.5:
pp1[i]:=(l1[i]+l2[i]+l3[i])/2:
SS[i]:=(pp1[i]*(pp1[i]-l1[i])*(pp1[i]-l2[i])*(pp1[i]-l3[i]))^0.5:
SS1:=evalf(SS1+SS[i]):
end do:
for i from 2 by 4 to 10 do
l4[i]:=((x1[i]-x1[i+4])^2+(y1[i]-y1[i+4])^2+(z1[i]-z1[i+4])^2)^0.5:
l5[i]:=((x1[i]-x1[i+5])^2+(y1[i]-y1[i+5])^2+(z1[i]-z1[i+5])^2)^0.5:
l6[i]:=((x1[i+4]-x1[i+5])^2+(y1[i+4]-y1[i+5])^2+(z1[i+4]-z1[i+5])^2)^0.5:
pp2[i]:=(l4[i]+l5[i]+l6[i])/2:
SS01[i]:=(pp2[i]*(pp2[i]-l4[i])*(pp2[i]-l5[i])*(pp2[i]-l6[i]))^0.5:
l7[i]:=((x1[i+1]-x1[i+5])^2+(y1[i+1]-y1[i+5])^2+(z1[i+1]-z1[i+5])^2)^0.5:
l8[i]:=((x1[i+1]-x1[i+6])^2+(y1[i+1]-y1[i+6])^2+(z1[i+1]-z1[i+6])^2)^0.5:
l9[i]:=((x1[i+6]-x1[i+5])^2+(y1[i+6]-y1[i+5])^2+(z1[i+6]-z1[i+5])^2)^0.5:
pp3[i]:=(l7[i]+l8[i]+l9[i])/2:
SS02[i]:=(pp3[i]*(pp3[i]-l7[i])*(pp3[i]-l8[i])*(pp3[i]-l9[i]))^0.5:
SS2:=evalf(SS2+SS01[i]+SS02[i]):
end do:
S3:=SS1+SS2;
evalf(abs(100*(S-S3)/S));
t1:=polygonplot3d([x1[1],x1[2],x1[6]],[y1[1],y1[2],y1[6]],[z1[1],z1[2],z1[6]]):
t2:=polygonplot3d([x1[1],x1[10],x1[6]],[y1[1],y1[10],y1[6]],[z1[1],z1[10],z1[6]]):
t3:=polygonplot3d([x1[1],x1[10],x1[14]],[y1[1],y1[10],y1[14]],[z1[1],z1[10],z1[14]]):
t4:=polygonplot3d([x1[2],x1[3],x1[7]],[y1[2],y1[3],y1[7]],[z1[2],z1[3],z1[7]]):
t5:=polygonplot3d([x1[2],x1[6],x1[7]],[y1[2],y1[6],y1[7]],[z1[2],z1[6],z1[7]]):
t6:=polygonplot3d([x1[6],x1[7],x1[11]],[y1[6],y1[7],y1[11]],[z1[6],z1[7],z1[11]]):
t7:=polygonplot3d([x1[6],x1[10],x1[11]],[y1[6],y1[10],y1[11]],[z1[6],z1[10],z1[11]]):
t8:=polygonplot3d([x1[10],x1[11],x1[15]],[y1[10],y1[11],y1[15]],[z1[10],z1[11],z1[15]]):
t9:=polygonplot3d([x1[10],x1[14],x1[15]],[y1[10],y1[14],y1[15]],[z1[10],z1[14],z1[15]]):
t10:=polygonplot3d([x1[3],x1[4],x1[8]],[y1[3],y1[4],y1[8]],[z1[3],z1[4],z1[8]]):
t11:=polygonplot3d([x1[3],x1[7],x1[8]],[y1[3],y1[7],y1[8]],[z1[3],z1[7],z1[8]]):
t12:=polygonplot3d([x1[7],x1[8],x1[12]],[y1[7],y1[8],y1[12]],[z1[7],z1[8],z1[12]]):
t13:=polygonplot3d([x1[7],x1[11],x1[12]],[y1[7],y1[11],y1[12]],[z1[7],z1[11],z1[12]]):
t14:=polygonplot3d([x1[11],x1[12],x1[16]],[y1[11],y1[12],y1[16]],[z1[11],z1[12],z1[16]]):
t15:=polygonplot3d([x1[11],x1[15],x1[16]],[y1[11],y1[15],y1[16]],[z1[11],z1[15],z1[16]]):
display3d([t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15], axes = normal);

```

Приложение Д

Листинг программы по вертикальной планировке рельефа местности с сохранением баланса земляных работ и с учётом поправки на показатель разрыхления грунта

restart:

```

x1:=xA00*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA10*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA20*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA30*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
y1:=yA00*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA10*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA20*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA30*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
z1:=zA00*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA10*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA20*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA30*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
x2:=xA01*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA11*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA21*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA31*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
y2:=yA01*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA11*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA21*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA31*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
z2:=zA01*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA11*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA21*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA31*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
x3:=xA02*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA12*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA22*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA32*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
y3:=yA02*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA12*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA22*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA32*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
z3:=zA02*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA12*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA22*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA32*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
x4:=xA03*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+xA13*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+xA23*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+xA33*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
y4:=yA03*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+yA13*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+yA23*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+yA33*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
z4:=zA03*((1-u)^3-2.5*u*(1-u)^2+(1-u)*u^2)+zA13*(9*u*(1-u)^2-4.5*(1-
u)*u^2)+zA23*(-4.5*u*(1-u)^2+9*(1-u)*u^2)+zA33*(u*(1-u)^2-2.5*(1-u)*u^2+u^3);
x:=x1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+x2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+x3*(-
4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+x4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);
y:=y1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+y2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+y3*(-
4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+y4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);
z:=z1*((1-v)^3-2.5*v*(1-v)^2+(1-v)*v^2)+z2*(9*v*(1-v)^2-4.5*(1-v)*v^2)+z3*(-
4.5*v*(1-v)^2+9*(1-v)*v^2)+z4*(v*(1-v)^2-2.5*(1-v)*v^2+v^3);
xA00:=100; yA00:=16; zA00:=-8; xA10:=84; yA10:=10; zA10:=6; xA20:=48;
yA20:=19; zA20:=0; xA30:=10; yA30:=12; zA30:=-3;
xA01:=125; yA01:=40; zA01:=4; xA11:=90; yA11:=30; zA11:=-10; xA21:=68;
yA21:=45; zA21:=-5; xA31:=37; yA31:=40; zA31:=0;
xA02:=135; yA02:=60; zA02:=5; xA12:=112; yA12:=57; zA12:=10; xA22:=84;
yA22:=70; zA22:=15; xA32:=47; yA32:=60; zA32:=3;
xA03:=144; yA03:=87; zA03:=0; xA13:=112; yA13:=75; zA13:=-5; xA23:=93;
yA23:=94; zA23:=10; xA33:=56; yA33:=84; zA33:=-7;

```

```
x:=simplify(x); y:=simplify(y); z:=simplify(z);
Dx_u:=diff(x,u): Dx_v:=diff(x,v):
Dy_u:=diff(y,u): Dy_v:=diff(y,v):
Jacobian:=-Dx_u*Dy_v+Dx_v*Dy_u:
V:=int(int((z-h)*Jacobian,u=0..1),v=0..1);
plot3d([x,y,z],u=0..1,v=0..1,grid=[20,20]);
h:=solve(V=0,h);
kp:=0.26;
h1:=h*(2+2*kp)/(2+kp);
```